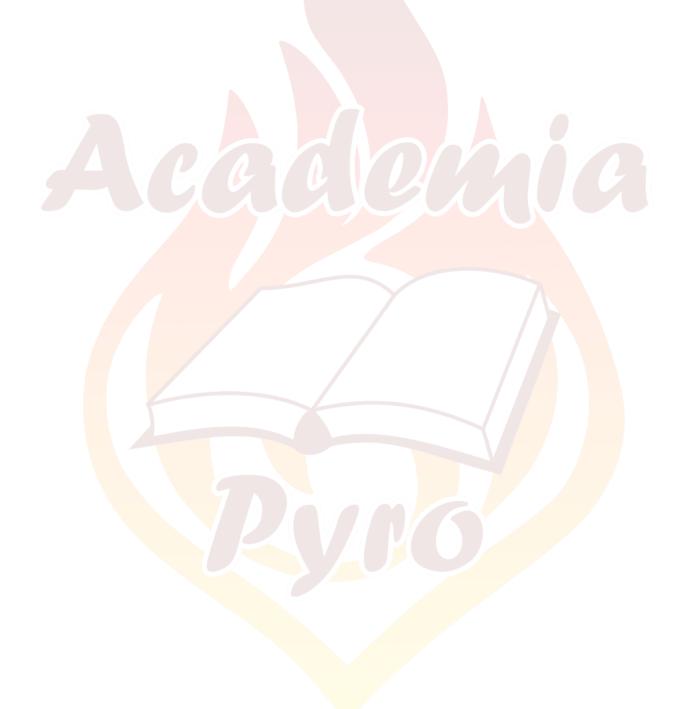
EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS COLECCIÓN DE REPASO 5



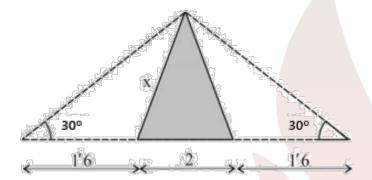
"Odié cada minuto de entrenamiento, pero dije, 'No renuncies. Sufre ahora y vive el resto de tu vida como un campeón." **Muhammad Ali (1942-2016)**

Determina el valor de a a para que el módulo del número complejo $\frac{a+2i}{1-i}$ sea igual a $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

 $a = \pm \sqrt{5}$



Observando el siguiente croquis, determina la longitud del lado x de la tienda de campaña y la longitud de las cuerdas que la mantienen sujeta al suelo.



La altura x de la tienda de campaña es de 1,361 metros y la longitud de los vientos es de 2,759 metros.

Dados los siguientes polinomios determina sus raíces utilizando el método de Ruffini, verifica que las raíces encontradas anulan el polinomio al sustituirlas en P(x) y expresa P(x) como producto de factores lineales y comprueba la factorización obtenida.

a)
$$P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$$

Raíces: 1, -1, 2, 3

Verificación de las raíces: P(1)=0, P(-1)=0, P(2)=0, P(3)=0

Factorización: P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x - 3)

b)
$$P(x) = x^4 - 6x^2 + 7x - 6$$

Raíces: 2, -3

Verificación de las raíces: P(2)=0, P(−3)=0

Factorización: $P(x) = (x-2)(x+3)(x^2-x+1)$

c)
$$P(x) = x^4 - 5x^2 - 36$$

Raíces: 3, -3

Verificación de las raíces: P(3)=0, P(-3)=0

Factorización: $P(x) = (x-3)(x+3)(x^2+4)$

a) En una pequeña ciudad con 29.524 habitantes, un vecino se entera de una noticia. Después de una hora, comunica la noticia a tres de sus vecinos. Cada uno de esos tres, al cabo de una hora, la transmite a otros tres vecinos que aún no la conocen. Este proceso de transmisión se repite de la misma manera. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que todos los habitantes de la ciudad se enteren de la noticia?

Pasarán 9 horas hasta que todos los 29,524 habitantes de la ciudad se enteren de la noticia.

b) Se deja caer una pelota de tenis desde una altura de 15 metros. Si, al rebotar, sube a un tercio de la altura en cada bote, utiliza una progresión geométrica para calcular la distancia total que recorrerá la pelota antes de detenerse.

La distancia total que recorrerá la pelota hasta detenerse es 30 metros.



a) En una intervención del CEIS en una nave industrial de Yecla, se necesita determinar la altura de una abertura elevada para planificar una entrada segura mediante escala manual. La distancia desde el bombero hasta la base del muro es 2 metros menor que la altura de la abertura. Saben que la línea imaginaria que conecta al bombero con la abertura, junto con la distancia horizontal y la altura del muro, forma un triángulo rectángulo cuyo perímetro es de 30 metros. ¿Cuál es la altura de la abertura respecto al suelo?

La altura es de 10 metros.

b) En una intervención en un solar de difícil acceso junto a una nave agrícola en la zona de Archena, los bomberos del CEIS necesitan calcular el área libre disponible para desplegar el equipo de ventilación y crear un perímetro de seguridad. El espacio útil tiene forma de triángulo rectángulo, donde uno de los lados perpendiculares es una cuarta parte menor que el otro. Tras ampliar el área despejando 4 metros adicionales en ambas direcciones (en perpendicular), el área del triángulo libre pasa a ser de 80,5 metros cuadrados. Determina las dimensiones de los lados del triángulo inicial y el área que tenía antes de ser ampliado.

Los catetos del triángulo original miden 10 m y 7,5 m y la hipotenusa 12,5. Su área original es de 37,5 m²

a) Se va a construir una piscina rectangular en el parque de Lorca para prácticas con el equipo y material de rescate en medio acuático. Para la seguridad de la piscina y la realización de los ejercicios recogidos en todas las Instrucciones Técnicas de Trabajo, la piscina requiere de un borde de 2 metros de ancho por todos los lados. Si el área total incluyendo el borde es de 252 m² y la piscina tiene un largo 4 metros mayor que su ancho, ¿cuáles son sus dimensiones?

El ancho de la piscina es de 10 metros y el largo es de 14 metros.

b) Durante la preparación de uno de los módulos de la academia de formación para los bomberos de nuevo ingreso en el CEIS, el Jefe de la Sección de Prevención y Formación prepara junto con el de la Sección Técnica un área para la realización de maniobras dentro del parque de Molina de Segura. Este área debe ser rectangular y se diseñó de manera que su largo supera en 6 metros al ancho. Alrededor del área, se dejó un pasillo perimetral de 1 metro de ancho para colocación de herramientas y circulación. Si la superficie total ocupada es de 432 m², ¿cuáles son las dimensiones del área para las maniobras?

Las dimensiones de la zona interior destinada al entrenamiento son 16 metros de ancho y 22 de largo.

a) En un campeonato de fútbol participan 12 equipos. ¿De cuántas formas se ocupan los tres primeros puestos?

El orden importa porque cada puesto (primero, segundo, tercero) es distinto, y por eso usamos permutaciones. Calculamos el número de formas posibles de asignar estos tres puestos a los 12 equipos disponibles, lo cual nos da 1320 formas distintas de ocupar los tres primeros puestos.

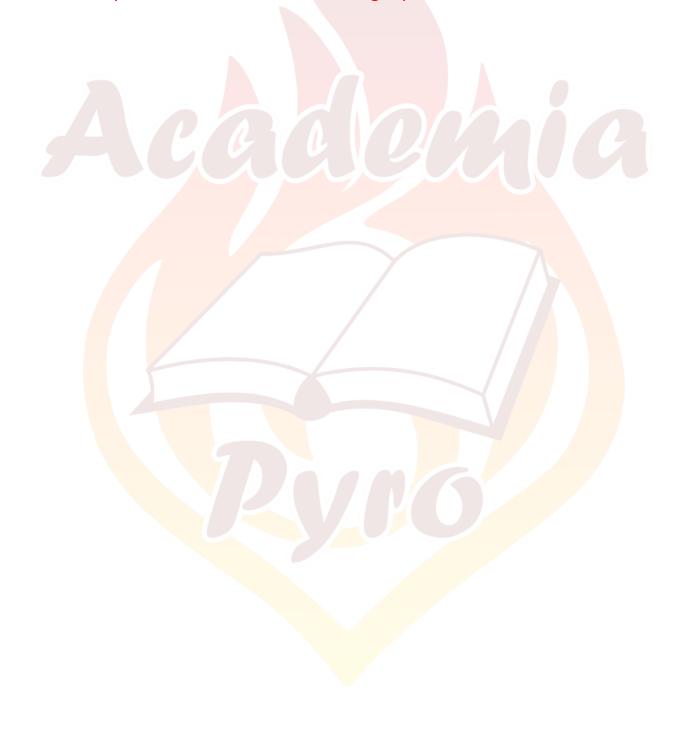
b) ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar utilizando las cifras 1, 2, 3 y 4, sin repetir ninguna cifra? ¿Cuántos de esos números terminan en 34? ¿Cuántos de esos números son mayores que 300??

Hay 24 números de tres cifras que se pueden formar. 2 números terminan en 34. 12 números son mayores que 300.



Con motivo de la campaña de prevención de incendios forestales en verano, el CEIS de la Región de Murcia decidió distribuir 100 herramientas entre los distintos parques. Las herramientas son de tres tipos: hachas-azadas (valoradas en 25 € cada una), batefuegos (5 € cada uno) y silbatos de emergencia (0,25 € cada uno). El total invertido en esta compra fue de 500 €. Además, la cantidad total de hachas-azadas y batefuegos adquiridos equivale a la cuarta parte del número total de silbatos. ¿Cuántas unidades de cada tipo de herramienta se distribuyeron?

Se distribuyeron 19 hachas-azadas 1 batefuegos y 80 silbatos.



a) ¿Cuántas combinaciones distintas se pueden obtener si se extraen cinco cartas de una baraja de 40 cartas?"

 $C_{40.5} = 658008$ combinaciones posibles.

b) En un grupo de 20 estudiantes, se otorgarán 3 premios: uno al mejor estudiante en matemáticas, otro al mejor en historia y otro al mejor deportista. ¿Cuántas maneras diferentes podemos asignar estos premios?

Se pueden conceder los 3 premios de 6840 formas distintas.

c) Con los números 3, 5, 6, 7 y 9, ¿cuántos productos distintos se pueden obtener multiplicando dos de estos números? ¿Cuántos de estos productos son múltiplos de 2? ¿Cuántos cocientes distintos se pueden obtener dividiendo dos de estos números?

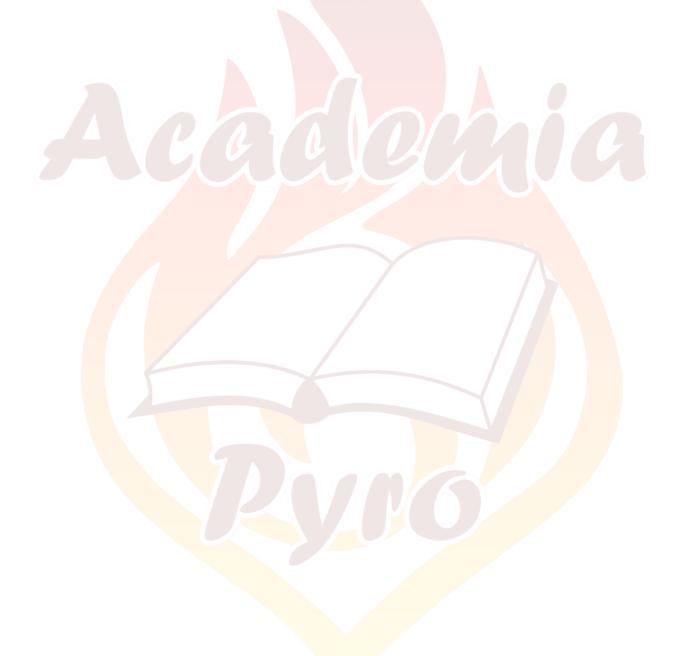
Se pueden obtener 10 productos distintos, 4 productos son múltiplos de 2 y se pueden obtener 20 cocientes distintos.



Dados los complejos 2 - ai y 3 - bi, halla a y b para que su producto sea igual a 8 + 4i.

$$a_1 = \frac{2}{3} \rightarrow b_1 = -3$$

$$a_2 = -2 \rightarrow b_2 = 1$$

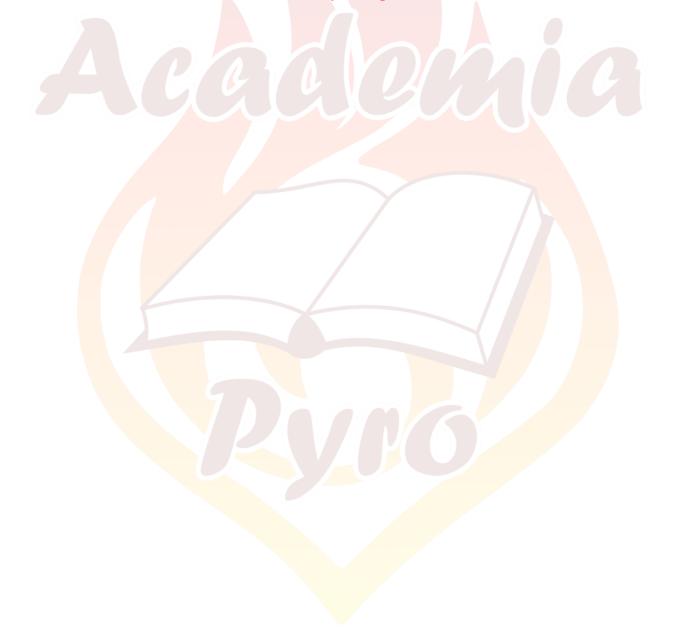


Durante una práctica de cálculo de distancias, un bombero observa la punta de una torre reflejada en un charco. Se detiene justo en el punto desde el cual puede ver la cima reflejada, y toma las siguientes medidas:

- La altura del bombero es de $\sqrt{3}$ metros.
- La distancia desde el bombero hasta el charco es de 3 metros.
- La distancia desde el charco hasta la base de la torre es de 35 metros.

¿Cuál es la altura de la torre y que ángulo forma la visual del reflejo del charco con el suelo?

La altura de la torre es de 20,21 metros y el ángulo de la visual es de 30°.



En el almacén del CEIS, en el parque de Molina de Segura, se tienen dos paquetes de equipos de protección individual para repartir. El primero contiene 5 cascos blancos para intervención en incendios urbanos y 4 cascos negros para intervenciones en incendios forestales. El segundo equipo contiene 3 cascos blancos y 2 cascos negros. Se toma al azar un casco del primer equipo y, sin mirarlo, se introduce en el segundo equipo. A continuación, se extraen, de forma consecutiva y con reemplazamiento, dos cascos del segundo equipo. Hállese la probabilidad de que los dos cascos extraídos sean:

a) Del mismo tipo de intervención (ambos para incendios urbanos o ambos para incendios forestales).

La probabilidad de que ambos cascos sean del mismo tipo es 13/25.

b) De distinto tipo de intervención (uno para incendio urbano y otro para incendio forestal).

La probabilidad de que los cascos sean de distinto tipo es 12/25.



a) Calcula el valor de $(3a - 2b)^2 - (3a + 2b)^2$ en función de a y b.

Usamos la identidad: $(x - y)^2 - (x + y)^2 = -4xy$

En este caso:

$$x = 3a$$

$$y = 2b$$

Aplicamos directamente:

$$(3a-2b)^2 - (3a+2b)^2 = -4 \cdot 3a \cdot 2b = -24ab$$

b) Simplifica la siguiente expresión racional:

$$\frac{3x^2 - 6x}{3x} \div \frac{x^2 - 4}{2x - 4}$$

$$\frac{2(x-2)}{x+2}$$

c) Calcula el resto de dividir $x^3 - 5x + 6$ por el binomio x - 2.

Usando el teorema del resto:

Sustituimos x = 2

$$f(2) = (2)^3 - 5(2) + 6 = 8 - 10 + 6 = 4$$

El resto es 4.

d) Utiliza el Triángulo de Tartaglia (Pascal) para desarrollar la expresión $(a + b)^4$.

Fila del Triángulo de Pascal para n = 4

Aplicamos la fórmula del binomio de Newton:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Una de las actividades dentro de una campaña de divulgación ciudadana organizada por el CEIS de la CARM, consiste en el encargo de un cartel rectangular informativo para colocar en cada parque de bomberos. El diseño inicial establece que el largo del cartel debe ser el doble del ancho. Su área inicialmente es de 18 metros cuadrados. Sin embargo, tras revisar la visibilidad y el espacio disponible, se decidió modificar las dimensiones de los carteles manteniendo la relación entre el ancho y el largo. Debido a esta reducción en las dimensiones el perímetro se redujo en 6 metros. Sí el presupuesto que la Unidad Central ha destinado a esta campaña es de 5000 €, el metro cuadrado de cartel cuesta 35 € y hay 16 parques de bomberos en el CEIS, ¿se puede llevar a cabo esta actividad?

Dado que el presupuesto disponible es de 5000 € y el costo total estimado es de 4480 €, sí que se puede llevar a cabo la campaña divulgativa.



Sean los números complejos: $z_1=4\angle60^\circ$ y $z_2=3\angle210^\circ$ (dados en forma polar).

a) Convierte z_1 y z_2 a su forma binómica.

Recordamos que para convertir de forma polar $r \angle \theta$ a binómica usamos:

$$z = r(\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$$

$$z_1 = 4 \angle 60^{\circ}$$

$$z_1 = 4(\cos 60^\circ + i \cdot \sin 60^\circ) = 4\left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}i$$

$$z_2 = 3 \angle 210^{\circ}$$

$$\mathbf{z}_2 = 3(\cos 210^\circ + \mathbf{i} \cdot \sin 210^\circ) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathbf{i} \cdot \frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\mathbf{i}$$

b) Calcula el producto $z_1 \cdot z_2$ y el cociente $\frac{z_2}{z_1}$ y expresa ambos resultados en forma polar.

Producto $z_1 \cdot z_2$

$$z_1 \cdot z_2 = (4 \cdot 3) \angle (60^{\circ} + 210^{\circ}) = 12 \angle 270^{\circ}$$

Cociente $\frac{z_2}{z_1}$

$$\frac{z_2}{z_1} = (3-4)\angle(210^\circ - 60^\circ) = 34\angle150^\circ$$

Determinar, aplicando el teorema del resto, el valor de a para que el resto de la división siguiente sea -1; comprobar, a continuación, el resultado obtenido haciendo la división.

$$\frac{-x^5 + 3x^4 + ax^3 + 9x^2 + 2x - 7}{x - 3}$$

Usando el teorema del resto:

$$P(3) = -(3)^5 + 3(3)^4 + a(3)^3 + 9(3)^2 + 2(3) - 7 = 27a + 80$$

Queremos que P(3) = -1

$$27a + 80 = -1 \Rightarrow 27a = -81 \Rightarrow a = -3$$

La división nos da:

$$C(x) = -x^4 - 3x^2 + 2$$

$$R(x) = -1$$

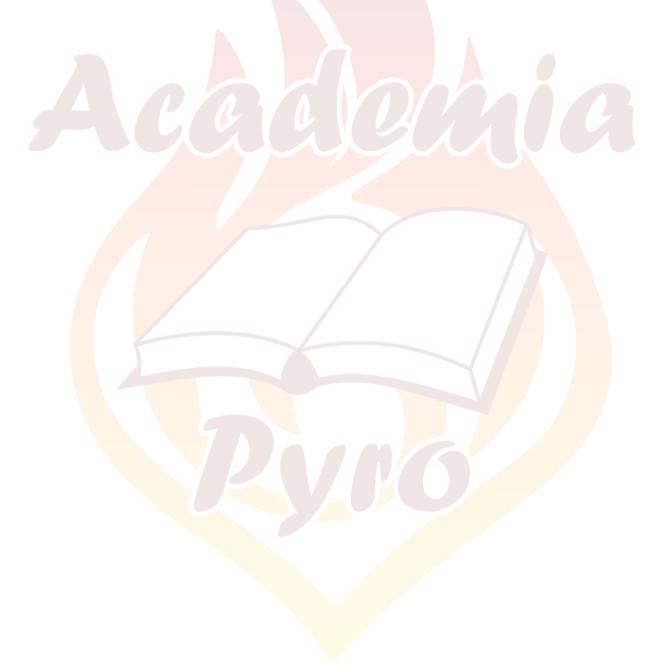
La prueba de la división es: Dividendo = (Divisor · Cociente) + Resto

$$(-x^4 - 3x^2 + 2) \cdot (x - 3) - 1 = -x^5 + 3x^4 + ax^3 + 9x^2 + 2x - 7$$

Cumple.

En una intervención prolongada durante un gran incendio agrícola en el término de Mula, el CEIS de la CARM instaló una base de apoyo logístico para el descanso del personal. Para ello se utilizaron módulos de descanso de tres tipos: tipo A (capacidad para 2 bomberos, coste de 80 € por noche), tipo B (para 4 bomberos, 110 € por noche) y tipo C (para 6 bomberos, 150 € por noche). Durante una noche completa, se alojó a un total de 112 bomberos. El coste total de los módulos fue de 3190 €. Además, se sabe que el número de módulos tipo B fue exactamente uno más que la suma de los módulos tipo A y tipo C. ¿Cuántos módulos de cada tipo se utilizaron?

8 módulos de tipo A, 15 módulos de tipo B y 6 módulos de tipo C.



El CEIS de la Región de Murcia está valorando tres contratos para el repostaje y mantenimiento de sus vehículos de intervención rápida, en función de los kilómetros recorridos al mes.

Cada empresa ofrece una tarifa que incluye un coste fijo mensual y una cantidad proporcional a los kilómetros recorridos:

- Contrato A: 900 € fijos al mes más 0,45 €/km.
- Contrato B: 1.200 € fijos al mes más 0,35 €/km.
- Contrato C: 1.800 € fijos al mes más 0,25 €/km.

Se pide:

- a. ¿A partir de cuántos kilómetros al mes el contrato B es más económico que el A? El contrato B es mejor que el A a partir de más de 3000 km recorridos al mes.
- b. ¿Para qué valores de kilómetros el contrato A es mejor que el C y el B a la vez? El contrato A es el mejor cuando se recorren menos de 3000 km al mes.
- c. ¿Qué contrato conviene elegir si se prevé recorrer entre 2.500 y 3.500 kilómetros al mes?

Entre 2.500 y 3.000 km, el mejor contrato es A y entre 3.000 y 3.500 km, el mejor contrato es B.

a) Dos urnas, X e Y, contienen bolas de diferentes colores. La urna X tiene 5 bolas rojas, 3 verdes y 4 negras, mientras que la urna Y contiene 2 rojas, 4 blancas y 5 negras. Se extrae una carta de una baraja española. Si la carta extraída es una figura o un oro, se extrae una bola de la urna X. De lo contrario, se extrae una bola de la urna Y. ¿Cuál es la probabilidad de que al realizar este proceso se obtenga una bola negra?

47/120

- b) Una baraja española tiene 12 cartas: 5 de oros, 4 de espadas, y 3 de bastos. Se extraen tres cartas al azar. Calcula la probabilidad de que, al menos, una de las cartas sea de oros en los siguientes casos:
 - b.1) No se devuelven las cartas después de cada extracción.

291/494

b.2) Después de cada extracción, se devuelve la carta a la baraja antes de la siguiente extracción.

37/64

1. Calcula y simplifica:

$$\frac{2x}{x-3} - 3\left(\frac{3x-1}{x+3}\right) - \frac{7}{x^2-9}$$

$$\frac{-7x^2 + 36x - 16}{x^2 - 9}$$

- 2. Al resultado del apartado anterior hazle las siguientes operaciones e indica el polinomio final:
 - a. Multiplícalo por $x^2 9$

$$-7x^2 + 36x - 16$$

b. Multiplícalo por x²

$$-7x^4 + 36x^3 - 16x^2$$

c. Súmale el polinomio $34x^3 - 229x^2 + 350^x - 168$.

$$-7x^4 + 70x^3 - 245x^2 + 350x - 168$$

d. Divídelo entre -7.

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$$

3. Factoriza mediante Ruffini el siguiente polinomio:

$$24 - 10x^3 - 50x + x^4 + 35x^2$$

$$(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)$$

Simplifica las siguientes potencias y radicales:

a) $\sqrt[3]{1728}$

12

b)
$$\sqrt[7]{x^4\sqrt{x}}$$

 $\sqrt[7]{X^{9/2}}$

c)
$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{8}$$

$$2\cdot\sqrt[12]{2^7}$$

d)
$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2}{2^{-1}}$$

 $\frac{127}{8}$

a)
$$\frac{\left(2^{-5}\right)^0}{2^{-3}}$$

8

b)
$$\frac{15^2 \cdot 5^{-2} \cdot 5^3 \cdot 45^2}{\left(5^3\right)^2 \cdot 27 \cdot 3^{-2}}$$

 $\frac{243}{5}$

a) Determina las longitudes de los segmentos que la recta 5x - 3y + 7 = 0 traza sobre los ejes coordenados.

Con eje X:
$$\frac{7}{5}$$

Con eje Y:
$$\frac{7}{3}$$

b) Calcula el área de la región triangular delimitada por la recta 5x + y - 5 = 0 y los ejes coordenados.

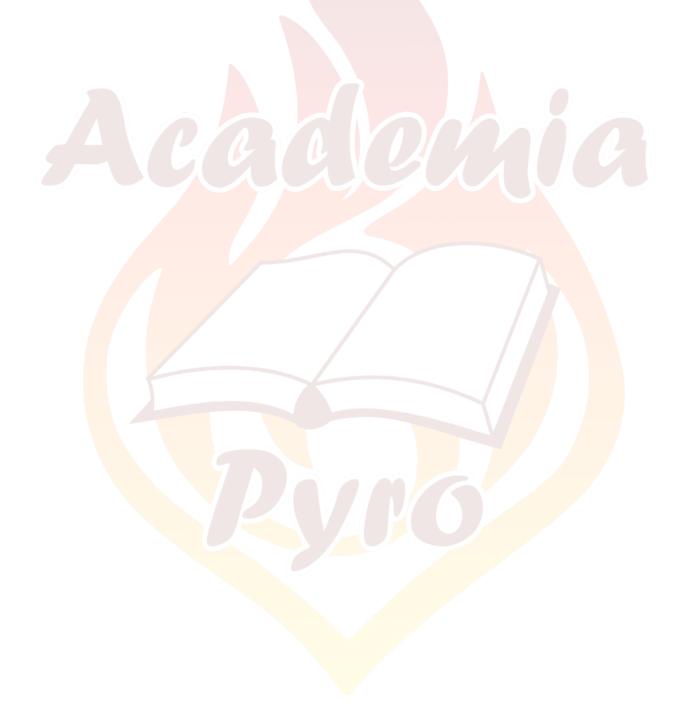
$$A = \frac{1 \cdot 5}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

c) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P(3,1) y cuya inclinación con respecto al eje X es de 45°.

$$y = x - 2$$

Determina la posición respecto de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 41 = 0$ de los puntos: M(-1,5), N(-1,-1) y O(2,5)

$$M(-1,5)$$
: $d^2 = (-1-2)^2 + (5+2)^2 = 9 + 49 = 58 > 49 \Rightarrow$ exterior $N(-1,-1)$: $d^2 = (-1-2)^2 + (-1+2)^2 = 9 + 1 = 10 < 49 \Rightarrow$ interior $O(2,5)$: $d^2 = (2-2)^2 + (5+2)^2 = 49 = r^2 \Rightarrow$ sobre la circunferencia



a) Un profesor cobra 20 € por la primera hora de clase, y en cada hora siguiente aumenta su tarifa en 5 €. Si al final el alumno pagó 1350 €, ¿cuántas horas de clase tomó?

Tomó 20 horas.

b) Calcula la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica 2, 1, 1/2, 1/4...

 $S_{\infty} = 4$

c) Si el primer término de una progresión geométrica es 5 y su razón es 2 ¿Qué término vale 1280?

El 9º término vale 1280

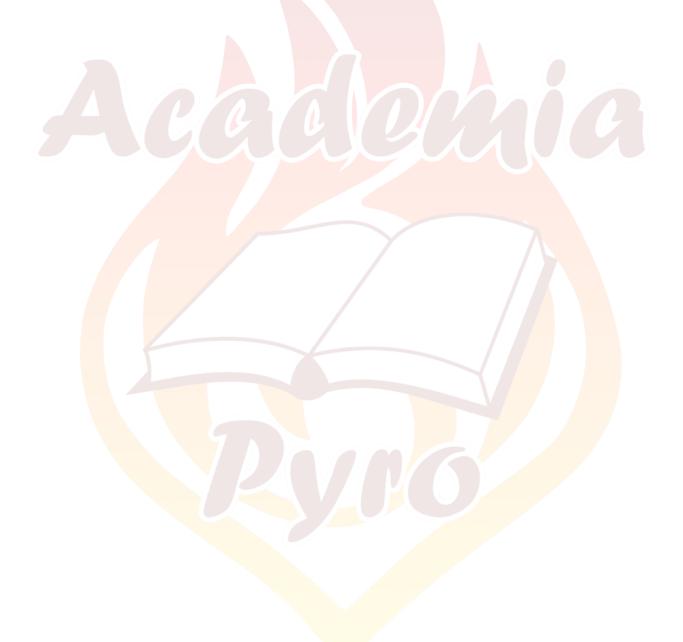


a) Determina m para que la división $(x^3 + mx^2 + 2x + 3)$: (x - 1) tenga por resto -9.

$$m = -15$$

b) Obtén el valor de g sabiendo que x=-2 es una de las raíces del polinomio $P(x)=x^3+2x^2-3x+g.$

$$g = -6$$



1. Expresa en forma binómica el número complejo $z=6_{210^{\circ}}$ y escribe su opuesto y su conjugado.

$$z = -3\sqrt{3} - 3i$$

$$-z = 3\sqrt{3} + 3i$$

$$\overline{z} = -3\sqrt{3} + 3i$$

2. Calcula:

a)
$$i^{30} \cdot \frac{2+3i}{4-i}$$

$$-\frac{5}{17} - \frac{14}{17}i$$

b)
$$\frac{1-3i}{3-4i} + i^{37}$$

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

a) En un triángulo isósceles, los dos lados congruentes miden 20 cm y cada uno de los ángulos en la base es de 30°. Determina todos sus lados y ángulos, y calcula el área del triángulo.

Ángulo del vértice = 120°

Base = $20\sqrt{3}$ cm

Área = $100\sqrt{3}$ cm²

b) En una maniobra de rescate, los bomberos elevan una cesta sujeta por dos cables anclados al suelo en puntos separados 40 m. El cable más corto mide 30 m y el otro cable forma con el suelo un ángulo 30 grados. Calcula la altura de la cesta y la longitud del cable más largo.

Altura =
$$10\sqrt{3} + 5\sqrt{5}$$
 m
Cable largo = $20\sqrt{3} + 10\sqrt{5}$ m

c) Durante una intervención, un equipo de bomberos evalúa dos edificios gemelos situados a 150 m uno del otro. Desde un punto de observación en el suelo, ubicado entre ambos edificios, un bombero mide con un clinómetro los ángulos de elevación hacia las azoteas: hacia el edificio de la izquierda observa 30° y hacia el de la derecha 60° (respecto a la horizontal). Determinar la altura de cada edificio y calcular la distancia desde el punto de observación a cada edificio.

Altura edificios =
$$\frac{75\sqrt{3}}{2} \simeq 64,95$$
 metros

Distancia al primer edificio = $H\sqrt{3} \simeq 112,5$ metros

Distancia al segundo edificio =
$$\frac{H}{\sqrt{3}} \simeq 37,5$$
 metros

De un número de tres cifras se sabe que la suma de estas es 13. Si se intercambian las cifras de las unidades y las centenas, el número disminuye en 198; y, si se intercambian las de la unidades y decenas, el número aumenta en 36. Encuentra el número.

715



El Parque de Bomberos de la ciudad necesita alquilar camiones cisterna de apoyo para una intervención en otra provincia. Se han puesto en contacto con dos empresas de alquiler de vehículos especiales:

- La empresa Rápidos cobra una tarifa fija de 75 € más 0,50 € por cada kilómetro recorrido.
- La empresa Seguros cobra una tarifa fija de 95 € más 0,40 € por cada kilómetro recorrido.
- a) ¿A partir de cuántos kilómetros resulta más económica la empresa Rápidos?

Rápidos es más económica para recorridos menores de 200 km (a los 200 km cuestan lo mismo; a partir de ahí conviene Seguros).

b) Si los bomberos deben desplazarse 350 km, ¿con qué empresa les conviene más alquilar? ¿Y si el recorrido es de 480 km?

350 km: $R = 75 + 0.5 \cdot 350 = 250 \in$, $S = 95 + 0.4 \cdot 350 = 235 \in$ → Seguros

480 km: R = 315 €, S = 287 € → Seguros



a) La recta 3x - 2y - 6 = 0 corta a los ejes en dos puntos A y B. Calcularlos y hallar la mediatriz de AB.

$$4x + 6y + 5 = 0$$

b) Hallar la distancia del punto P(-1,2) al punto de corte de las rectas x=2 y 2x+y-2=0.

$$\frac{\sqrt{145}}{5}$$

