MATEMÁTICAS

TEMA 1

NÚMEROS REALES. NÚMEROS IMAGINARIOS. POTENCIAS. RADICALES.

"Mejor que de nuestro juicio, debemos fiarnos del cálculo algebraico."

Leonhard Euler (1707-1783)

1. NÚMEROS REALES

Partimos de que ya conoces los distintos tipos de conjuntos numéricos:

Naturales ➔ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$

Enteros ➔ $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

Racionales ➔ $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$

Los números racionales también contienen a los números que tienen expresión decimal exacta (0'12345) y a los que tienen expresión decimal periódica (7'01252525…). Si el denominador (de la fracción irreducible) solo tiene como factores primos potencias de 2 o 5 la expresión decimal es exacta. Si el denominador (de la fracción irreducible) tiene algún factor primo que no sea ni 2 ni 5 la fracción tendrá una expresión decimal periódica.

Todas las fracciones tienen expresión decimal exacta o periódica; y toda expresión decimal exacta o periódica se puede escribir en forma de fracción.

Pero ya sabes que existen números que no son racionales. Por ejemplo: $\sqrt{2}$ **no** puede ponerse como una fracción. Todos estos números, por ejemplo $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, π… junto con los números racionales forman el conjunto de los **números reales**. A los números reales que no son números racionales se les llama **números irracionales**.

La expresión decimal de los **números irracionales** es de infinitas cifras no periódicas.

Por tanto:

Irracionales ➔ $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

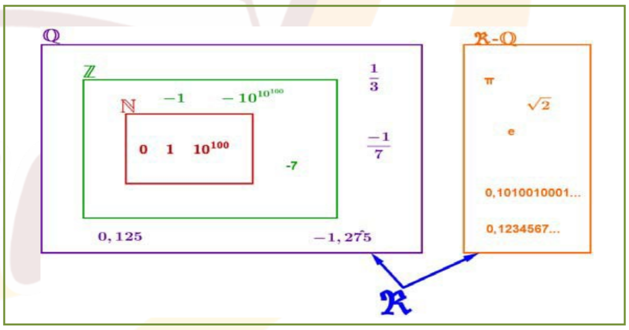
El conjunto de los números **reales** está formado por la unión de los números racionales y de los números irracionales.

Reales ➔ $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Tenemos por tanto que:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$



1.1. LA RECTA REAL

1.1.1. DENSIDAD DE LOS NÚMEROS REALES

Los números reales son **densos**, es decir, entre cada dos números reales hay infinitos números.

Eso es fácil de deducir, si a, b son dos números con a < b sabemos que $a < \frac{a+b}{2} < b$, es decir, la media está entre los dos números. Como esto podemos hacerlo las veces que queramos, pues de ahí el resultado.

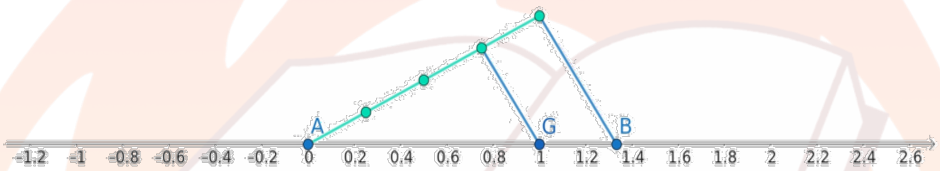
1.1.2. REPRESENTACIÓN EN LA RECTA REAL DE LOS NÚMEROS REALES

Elegido el origen de coordenadas y el tamaño de la unidad (o lo que es igual, si colocamos el 0 y el 1) todo número real ocupa una posición en la recta numérica y al revés, todo punto de la recta se puede hacer corresponder con un número real.

Los **enteros** se representan como puntos en la recta real. Estos puntos son equidistantes entre sí y el punto anterior y posterior son iguales a $n-1$ y $n+1$, donde n es el punto actual. Además, tienen un equivalente negativo o positivo, dependiendo del número; por ejemplo, por cada a entero positivo, existe el mismo punto en la recta pero negativo $-a$.

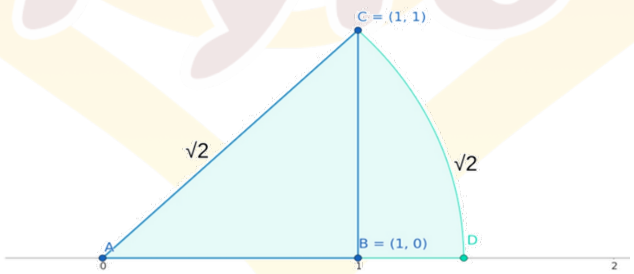
Para representar números **racionales** en la recta real, podemos ayudarnos del teorema de Tales. Creamos un segmento, que dividimos en tantas partes como necesitemos; después, unimos el al punto que representa la unidad en este segmento. Por último, trazamos un segmento paralelo a este segmento que hemos trazado en primer lugar. El lugar donde corte este último segmento con la recta real será la representación de nuestro número racional en la recta real.

Si quisiéramos, por ejemplo, representar el $\frac{4}{3}$, dividimos un segmento en 4 partes. Como el número es el $\frac{4}{3}$, entonces la unidad corresponde al $\frac{3}{3}$; es decir, el tercer punto en nuestro segmento. Unimos este punto con el 1. Finalmente, trazamos un segmento paralelo a este; donde corte con la recta real, será la representación gráfica del $\frac{4}{3}$.



En lo que respecta a los números **irracionales**, solo se pueden representar en la recta real algunos números irracionales: los que corresponden a operaciones con números enteros; como, por ejemplo, raíces de números naturales. Para representar números irracionales que son raíces de números naturales, usamos el teorema de Pitágoras.

Por ejemplo, para representar el $\sqrt{2}$, al ser una raíz de un número natural, podemos usar el teorema de Pitágoras. En este caso, es la hipotenusa de un triángulo de catetos de longitud 1. Representamos, entonces, este triángulo y con un compás llevamos el vértice de la hipotenusa sobre la recta real. Este será el punto de la recta real que corresponde a $\sqrt{2}$.



Los números irracionales que no se pueden representar como una fracción como el número de Euler o el número π. Estos números tienen una parte decimal infinita, de la cual no se sabe su patrón.

1.2. VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto o módulo de un número, equivale al valor de ese número ignorando el signo. Por ejemplo, el valor absoluto de -1 es 1, y el valor absoluto de +1, también es 1.

En lenguaje formal, el valor absoluto se define de la siguiente manera.

$$|x| = \begin{cases} -x \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Como el valor absoluto es una función muy importante en matemáticas, tiene su propio símbolo. Para escribir el valor absoluto de un número x, basta con encerrar el número entre dos barras: $|x|$.

El valor absoluto de un número x se consigue suprimiendo el signo, y se anota mediante el símbolo $|x|$.

1.2.1. ¿PARA QUÉ SIRVE?

El valor absoluto se utiliza principalmente para definir cantidades y distancias en el mundo real. Los números negativos son una construcción matemática que se utiliza en el cálculo, pero en la realidad no existen cantidades negativas. No podemos viajar una distancia de –100 kilómetros, o comer –3 caramelos. Esto se debe a que el tiempo solo discurre en una dirección (positiva por convención), pero eso no entra en el ámbito de las matemáticas, sino en el de la física.

El valor absoluto se usa para expresar cantidades o longitudes válidas en el mundo real, como la distancia.

1.3. DESIGUALDADES

Una desigualdad es una expresión numérica o algebraica unida por uno de los cuatro signos de desigualdad: <, >, ≤, ≥.

1.4. DISTANCIA EN LA RECTA REAL

La distancia entre dos números reales x e y se define como:

$$\text{Dist}\,(x, y) = |x - y|$$

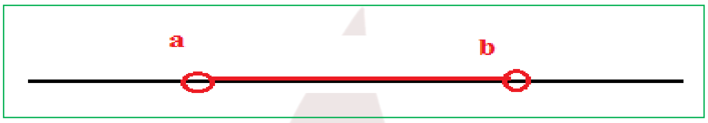
1.5. INTERVALOS Y ENTORNOS

Un intervalo de números reales es un conjunto de números correspondientes a una parte de la recta numérica, en consecuencia, un intervalo es un subconjunto del conjunto de los números reales.

1.5.1. TIPOS DE INTERVALOS

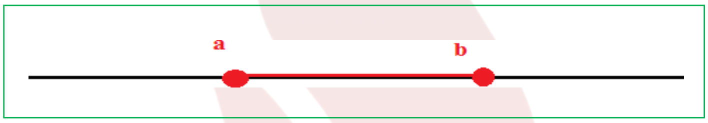
Intervalo abierto: es aquel en el que los extremos no forman parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos forman parte del intervalo, salvo los propios extremos.

En otras palabras $\mathrm{I} = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. Gráficamente, lo representamos en la recta real del modo siguiente:



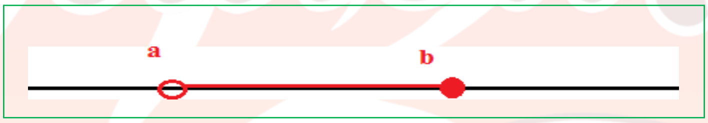
Intervalo cerrado: es aquel en el que los extremos si forman parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos, incluidos éstos, forman parte del intervalo.

En otras palabras, $\mathrm{I} = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$. Gráficamente:



Intervalo semiabierto: es aquel en el que solo uno de los extremos forma parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos, incluido uno de estos, forman parte del intervalo.

Intervalo semiabierto por la izquierda, el extremo inferior no forma parte del intervalo, pero el superior si, en otras palabras, $\mathrm{I} = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.



Intervalo semiabierto por la derecha, el extremo superior no forma parte del intervalo, pero el inferior si, en otras palabras $\mathrm{I} = [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$. Gráficamente:

1.5.2. SEMIRRECTAS REALES

Semirrecta de los números positivos $S+ = (0, \infty)$, es decir, desde cero hasta infinito.

Semirrecta de los números negativos $S- = (-\infty, 0)$, es decir, desde el menos infinito, el infinito negativo, hasta cero.

Con lo que toda la recta de los números reales es $\mathbb{R} = (-\infty, \infty) = (S+) \cup (S-) \cup \{0\}$. A una semirrecta se la puede considerar como un intervalo infinito.

1.6. NOTACIÓN CIENTÍFICA

La notación científica se utiliza para escribir números muy grandes o muy pequeños. Un número puesto en notación científica $\mathbf{N = a, bcd \ldots \cdot 10^n}$ consta de:

a) Una parte entera formada por una sola cifra que no es el cero (a).
b) El resto de las cifras significativas puestas como parte decimal (b c d).
c) Una potencia de base 10 que da el orden de magnitud del número (10^n).

1.6.1. OPERACIONES CON NOTACIÓN CIENTÍFICA

Para operar con números dados en notación científica se procede de forma natural, teniendo en cuenta que cada número está formado por dos factores: la expresión decimal y la potencia de base 10.

a) Para **multiplicar** números en notación científica, se multiplican las partes decimales y se suman los exponentes de la potencia de base 10.

b) Para **dividir** números en notación científica, se dividen las partes decimales y se restan los exponentes de la potencia de base 10.

c) Si hace falta se multiplica o se divide el número resultante por una potencia de 10 para dejar con una sola cifra en la parte entera.

d) Para **sumar o restar** números en notación científica, hay que poner los números con la misma potencia de base 10, multiplicando o dividiendo por potencias de base 10.

e) Se saca factor común la potencia de base 10 y después se suman o restan los números decimales quedando un número decimal multiplicado por la potencia de 10.

f) Por último, si hace falta se multiplica o se divide el número resultante por una potencia de 10 para dejar en la parte entera una sola cifra.

2. NÚMEROS COMPLEJOS

2.1. NECESIDAD DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS. EL NÚMERO i.

En el campo real la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución. El cuadrado de un número real es siempre positivo y al sumarle 1 es imposible que nos de 0.

Pero si se denomina **i** a la raíz cuadrada de -1, entonces

i^2 = -1, por lo que es una solución de dicha ecuación.

$$\mathbf{i^2 = -1 \Leftrightarrow i = \sqrt{-1}}$$

Pero no solo eso. Resulta que, introduciendo únicamente ese elemento nuevo, se puede demostrar lo que se denomina el *Teorema Fundamental del Álgebra*, que fue probado por Gauss (1799), y enseña que toda ecuación polinómica de grado *n* tiene exactamente *n* raíces.

2.2. NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA BINÓMICA. OPERACIONES.

Un número complejo se define como una expresión de la forma:

$$\mathbf{z = x + iy}$$

donde x e y son números reales.

Este tipo de expresión, $\mathbf{z = x + iy}$ se denomina **forma binómica**.

Se llama **parte real** de $z = x + iy$ al número real x, que se denota **Re(z)**, y **parte imaginaria** de $z = x + iy$, al número real y, que se denota **Im(z)**, por lo que se tiene entonces que: $z = \mathrm{Re}(z) + i \cdot \mathrm{Im}(z)$.

Esta construcción permite considerar a los números reales como un subconjunto de los números complejos, siendo **real** aquel número complejo de parte imaginaria nula. Así, los números complejos de la forma $z = x + i\,0$ son números reales y se denominan números **imaginarios puros** a los de la forma $z = 0 + i\,y$, es decir, con su parte real nula.

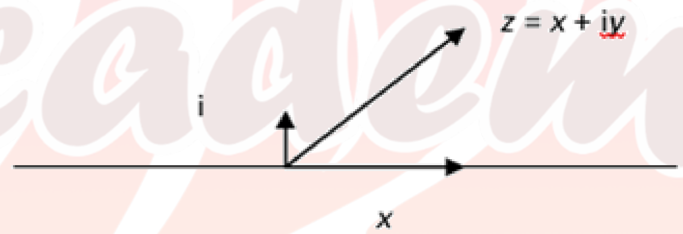
Dos números complejos $z_1 = x + i\,y$ y $z_2 = u + i\,v$ son **iguales** si y solo si tienen iguales sus partes reales y sus partes imaginarias: $x = u, y = v$.

2.2.1. CONJUGADO DE UN NÚMERO COMPLEJO

El conjugado del número complejo $z = (x + i\,y)$ se define como: $\bar{z} = (x - i\,y)$, y resulta de cambiar de signo la parte imaginaria de dicho número complejo.

2.2.2. REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS EN EL PLANO

El conjunto de los números complejos con las operaciones de suma y el producto por un número real tiene estructura de espacio vectorial de dimensión dos.



Al igual que los números reales representan los puntos de una recta, los números complejos pueden ser puestos en correspondencia biunívoca con los puntos de un plano. Los números reales se representan en el eje de abscisas o eje real, y a los múltiplos de $i = \sqrt{-1}$ se les representa como puntos del eje imaginario, perpendicular al eje real en el origen. A esta representación geométrica se la conoce como el **Diagrama de Argand**. El eje $y = 0$ se denomina **eje real** y el $x = 0$, **eje imaginario**.

Los números complejos se pueden representar como puntos del "plano complejo". El número complejo $z = x + i\,y$ se corresponde con la abscisa y la ordenada del punto del plano asociado al par (x, y).

La suma de números complejos corresponde gráficamente con la suma de vectores. Sin embargo, el producto de números complejos no es ni el producto escalar de vectores ni el producto vectorial.

2.3. OPERACIONES EN FORMA BINÓMICA

Las operaciones de suma y producto definidas en los números reales se pueden extender a los números complejos. Para la suma y el producto de dos números complejos escritos en la forma binómica: $x + i\,y$, $u + i\,v$ se tienen en cuenta las propiedades usuales del Álgebra con lo que se definen:

Suma: $(x + i\,y) + (u + i\,v) = (x + u) + i(y + v)$

Resta: $(x + i\,y) - (u + i\,v) = (x - u) + i(y - v)$

Producto: $(x + i\,y) \cdot (u + i\,v) = (x \cdot u - y \cdot v) + i(x \cdot v + y \cdot u)$

Cociente: $\frac{(x+i\,y)}{(u+i\,v)} = \frac{(x+i\,y)}{(u+i\,v)} \cdot \frac{(u-i\,v)}{(u-i\,v)} = \frac{xu+yv+i(yu-xv)}{u^2+v^2}$

2.4. NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR

2.4.1. MÓDULO DE UN NÚMERO COMPLEJO

El **módulo** de un número complejo se define como $|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, y representa la distancia de z al origen, es decir, la longitud del vector libre (x, y) en un plano de cartesiano.

Por tanto, el módulo nunca puede ser un número real negativo. El módulo de un número real coincide con su valor absoluto.

Otra forma de expresar el módulo de un complejo es mediante la expresión $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ donde $\bar{z}$ es el conjugado de z, siendo el producto de un número complejo por su conjugado igual a:

$$(x + i\,y) \cdot (x - i\,y) = x^2 + y^2$$

2.4.2. ARGUMENTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

El **argumento** de un número complejo z, representa el ángulo, en radianes, que forma el vector de posición con el semieje de abscisas positivas.

Es por tanto cualquier número real θ tal que:

$$\theta = \arccos\frac{x}{|z|} \qquad \theta = \arcsin\frac{y}{|z|} \qquad \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

Siendo **x** la parte real del número complejo z, **y** la parte imaginaria y $|\mathbf{z}|$ el módulo del número complejo.

Hay que destacar que todo número complejo tiene infinidad de argumentos, positivos y negativos, que se diferencian entre sí en múltiplos enteros de 2π radianes (360°), es decir, dando vueltas completas.

2.4.3. ARGUMENTO PRINCIPAL DE UN NÚMERO COMPLEJO

Si se quiere evitar la multiplicidad de los argumentos se puede seleccionar para θ un intervalo semiabierto de longitud 2π, lo que se llama elegir una rama del argumento; por ejemplo, si se exige que $\theta \in [0, 2\pi)$, se obtiene el argumento principal de z, que se denota por $\mathrm{Arg}(z)$. Si z es un número real negativo su argumento principal vale π.

El **argumento principal** $\mathbf{Arg(z)}$ de un número complejo z, representa el ángulo, en radianes, que forma el vector de posición con el semieje de abscisas positivas dentro de un intervalo angular concreto que abarca una vuelta completa. De esta forma se obtiene un solo valor para el argumento de dicho número complejo.

Para obtenerlo habrá que calcular el argumento y evaluar en que cuadrante se encuentra el número complejo.

2.5. FORMAS DE ESCRIBIR UN NÚMERO COMPLEJO CON LAS COORDENADAS POLARES

Hemos visto la forma de representar un numero complejo de forma binómica, sin embargo, existen más formas de representar un estos números dependiendo del contexto y la notación que se utilice. A continuación, se indican las formas más comunes:

2.5.1. FORMA TRIGONOMÉTRICA

La forma más general de un número complejo usando su módulo y su argumento (coordenadas polares) es:

$$z = r(\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$$

donde:

$r = | z | = \sqrt{x^2 + y^2}$ es el módulo del número complejo, es decir, su distancia al origen en el plano complejo.

$\theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ es el argumento o ángulo que forma el número complejo con el eje real positivo.

Esta es la **forma trigonométrica** de un número complejo.

2.5.2. FORMA EXPONENCIAL DE EULER

Gracias a la identidad de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \cdot \sin\theta$$

podemos escribir el número complejo en forma exponencial:

$$z = re^{i\theta}$$

Esta es la forma más compacta y útil en muchas aplicaciones, especialmente en cálculo avanzado y física.

2.5.3. FORMA POLAR (MÓDULO Y ÁNGULO)

A veces, se usa la notación de coordenadas polares para expresar el número complejo:

$$z = (r, \theta)$$

donde simplemente se indica el módulo y el argumento sin escribir la parte trigonométrica o exponencial.

Por ejemplo, si $z = 2 + 2i$, su módulo es $r = 8$ y su argumento es $\theta = \frac{\pi}{4}$, por lo que se escribiría como:

$$z = \left(8, \frac{\pi}{4}\right)$$

Esta notación es más común en geometría y aplicaciones gráficas.

2.5.4. FORMA FASORIAL

En ingeniería eléctrica y telecomunicaciones, especialmente en circuitos de corriente alterna, se usa una notación basada en fasores:

$$z = r\angle\theta$$

donde:

r es el módulo.

θ se expresa en radianes o grados.

Por ejemplo, el número 1+i se puede escribir como:

$$2\angle 45°$$

Esta notación es muy común en el análisis de señales y circuitos eléctricos.

RESUMEN DE LAS FORMAS DE ESCRIBIR UN NÚMERO COMPLEJO EN FORMA POLAR

Forma	Expresión	Ejemplo para $z = 1 + i$
Trigonométrica	$r(\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$	$2(\cos 45° + i \cdot \sin 45°)$
Exponencial	$re^{i\theta}$	$2e^{i\frac{\pi}{4}}$
Coordenadas polares	$z = (r, \theta)$	$\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$
Fasorial	$z = r\angle\theta$	$2\angle 45° = 2\angle\frac{\pi}{4}$

Cada una de estas formas tiene su utilidad dependiendo del área en la que se trabaje. La forma exponencial es muy útil en álgebra compleja y ecuaciones diferenciales, la fasorial es clave en ingeniería eléctrica, y la trigonométrica es útil en problemas de geometría y trigonometría.

2.6. OPERACIONES EN FORMA POLAR

Las operaciones de suma y producto son mucho más sencillas en la forma binómica. Por otro lado, la forma polar permite realizar de forma sencilla otras operaciones como la potencia o el radical:

Producto: $r\angle\theta_1 \cdot s\angle\theta_2 = (r \cdot s)_{\theta_1+\theta_2}$

Cociente: $\frac{r\angle\theta_1}{s\angle\theta_2} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\theta_1-\theta_2}$

Potencias: $(r\angle\theta)^n = r^n\angle(n \cdot \theta)$

Radicales: $\sqrt[n]{r\angle\theta} = \sqrt[n]{r}\angle\frac{\theta+k\cdot 360°}{n}$ con k = 0, 1, 2, …, n-1

2.7. CÁLCULO DE RAÍCES N-ÉSIMAS DE UN NÚMERO COMPLEJO

Hasta ahora hemos visto cómo operar con números complejos en sus distintas formas. Surge entonces el problema inverso: dado un número complejo w, ¿cómo podemos encontrar sus **raíces n-ésimas**? Es decir, queremos determinar todos los números complejos z tales que $z^n = w$.

En el campo real este problema a veces no tiene solución (por ejemplo, no existe un número real cuya cuadrado sea -1), o las soluciones no son únicas (la ecuación $x^2 = 4$ tiene dos soluciones reales: $x = 2$ y $x = -2$). En cambio, en el campo complejo toda ecuación $z^n = w$ con $w \neq 0$ tiene exactamente n soluciones distintas. Estas soluciones se denominan raíces n-ésimas de w.

Para resolver estos problemas usamos la **forma polar del número complejo** y la **fórmula de De Moivre**. Recordemos que cualquier número complejo no nulo puede expresarse en forma polar o trigonométrica.

Escribiremos w en la forma: $w = r(\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$

Donde:

- $r = |w|$ es el módulo de w (un número real positivo)
- $\theta = \arg(w)$ es un argumento de w (ángulo en radianes).

Esta propiedad de las potencias puede invertirse para extraer raíces. Observemos que la representación trigonométrica de w no es única: al ángulo θ podemos sumarle cualquier múltiplo de 2π sin cambiar el valor de w. Este hecho es la clave para obtener todas las soluciones de $z^n = w$.

Para obtener la formula general de las raíces n-ésimas tenemos en cuenta que, partiendo del complejo $w = r(\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$, buscamos $z = \rho \cdot (\cos\psi + i \cdot \sin\psi)$ tal que $z^n = w$. Tenemos por tanto que $z^n = \rho^n \cdot [\cos(n \cdot \psi) + i \cdot \sin(n \cdot \psi)]$. Por esto, deben cumplirse simultáneamente:

$\rho^n = r$ (los módulos deben coincidir)

$n \cdot \psi = \theta + 2k\pi$ (los argumentos deben coincidir teniendo en cuenta la periodicidad de 2π)

Del primer punto obtenemos $\rho = \sqrt[n]{r}$. Del segundo punto obtenemos $\psi = \frac{\theta+2k\pi}{n}$ para algún entero k. Combinando ambos resultados, las soluciones son aquellos complejos de módulo $\sqrt[n]{r}$ y argumento $\frac{\theta+2k\pi}{n}$. De aquí se deduce directamente la **fórmula de De Moivre para las raíces n-ésimas de un complejo**.

Fórmula de De Moivre para las raíces n-ésimas de un complejo:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \qquad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Esta expresión proporciona las n soluciones distintas de la ecuación $z^n = w$. Cada valor de k en 0,1,…,n−1 produce un ángulo diferente $\frac{\theta+2k\pi}{n}$, y por tanto un diferente z_k. Si tomáramos más valores de k fuera de ese rango, las soluciones comenzarían a repetirse porque el ángulo es periódico. Así, obtenemos exactamente n raíces.

2.7.1. CÓMO APLICAR LA FÓRMULA PASO A PASO

Para calcular concretamente las raíces n-ésimas de un número complejo dado, seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1, expresar w en forma polar

Calcularemos el módulo $r = |w|$ y un argumento $\theta = \arg(w)$. Es frecuente usar el argumento principal (el comprendido entre 0 y 2π) para empezar. Así escribimos $w = r[\cos\theta + i \cdot \sin\theta]$.

Paso 2, calcular la raíz n-ésima del módulo

$\rho = \sqrt[n]{r}$. Este será el módulo común a *todas* las raíces z.

Paso 3, calcular los argumentos de las raíces

A partir de un argumento θ de w, generar n ángulos distintos sumando múltiplos de 2π) y dividiendo por n. En concreto: $\psi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$, para $k = 0, 1, 2, \ldots n-1$

Estos n valores representan los n posibles argumentos para z.

Paso 4, escribir las n soluciones

Cada raíz queda: $z_k = \rho(\cos\psi_k + i \cdot \sin\psi_k) = \sqrt[n]{r} \cdot [\cos\psi_k + i \cdot \sin\psi_k]$, para $k = 0, 1, \ldots n-1$

Si se requiere, se pueden convertir estas soluciones a forma binómica realizando los cálculos de $\cos\psi_k$ y $\sin\psi_k$ correspondientes.

Siguiendo este procedimiento obtendremos todas las raíces n-ésimas de w.

2.7.2. EJEMPLO DE APLICACIÓN

Halla los números complejos que cumplen la siguiente ecuación: $z^3 + 64 = 0$.

Paso 1: Reescribimos la ecuación

$$z^3 = -64$$

Paso 2: Pasamos a forma polar

Cualquier número complejo en forma binómica $z = x + iy$ puede escribirse en forma polar:

$$z = r\,[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$$

siendo:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arg(z)$$

En nuestro caso:

$$-64 = 64 \cdot (-1)$$

Por lo que el número −64 en el plano complejo está sobre el eje real negativo.

Su módulo es: $r = |-64| = 64$

Su argumento es: $\theta = \pi$ (o 180°)

Así:

$$-64 = 64\,[\cos(\pi) + i\sin(\pi)]$$

Paso 3: Usamos la fórmula de De Moivre para raíces

Para resolver $z^n = w$, las raíces n-ésimas de un número complejo se obtienen con la fórmula:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \qquad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Aquí:

$n = 3$ (porque buscamos raíces cúbicas),

$r = 64$, entonces $\sqrt[3]{64} = 4$

$\theta = \pi$

Paso 4: Aplicamos la formula

$$z_k = 4\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)\right], \qquad \text{con } k = 0, 1, 2$$

Paso 5: Calculamos cada raíz

Para $k = 0$:

$$z_0 = 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}i$$

Para $k = 1$:

$$z_1 = 4\left[\cos\left(\frac{\pi + 2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi + 2\pi}{3}\right)\right] = 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = 4(-1 + 0i) = -4$$

Para $k = 0$:

$$z_2 = 4\left[\cos\left(\frac{\pi + 4\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi + 4\pi}{3}\right)\right] = 4\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right] = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 - 2\sqrt{3}i$$

Soluciones:

$\mathbf{z_0 = 2 + 2\sqrt{3}i}$

$\mathbf{z_1 = -4}$

$\mathbf{z_2 = 2 - 2\sqrt{3}i}$

3. POTENCIAS

3.1. CONCEPTO DE POTENCIA. BASE Y EXPONENTE

Una **potencia** es una forma de escribir de manera abreviada una multiplicación de factores iguales. La **potencia** a^n de base un número natural *a* y exponente natural *n* es un producto de *n* factores iguales a la base:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots^{\text{n factores}} \ldots\ldots \cdot a \ (n > 0)$$

El factor que se repite es la **base** y el número de veces que se repite es el **exponente**. Al resultado se le llama **potencia.**

Las potencias de exponente 2 se llaman **cuadrados** y las de exponente 3 se llaman **cubos**.

3.2. LECTURA DE POTENCIAS

Las potencias se pueden leer de dos maneras. Por ejemplo:

a) 3^2 se puede leer 3 elevado a 2 y también se lee 3 al cuadrado.

b) 11^3 se puede leer 11 elevado a 3 y también se lee 11 al cubo.

c) 27^5 se puede leer 27 elevado a 5 y también se lee 27 a la quinta.

3.3. POTENCIAS DE UNO Y DE CERO

Una potencia de cualquier base distinta de cero elevada a cero es igual a 1.

Uno, elevado a cualquier exponente, es igual a 1.

Cero, elevado a cualquier exponente distinto de cero, es igual a 0.

3.4. POTENCIAS DE 10

Las potencias de base 10 tienen una propiedad muy particular, son iguales a la unidad seguida de tantos ceros como indica el exponente.

3.5. OPERACIONES CON POTENCIAS

3.5.1. PRODUCTO DE POTENCIAS DE IGUAL BASE

Para calcular el **producto** de dos o más potencias de la misma base, se deja la misma base y se suman los exponentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

3.5.2. COCIENTE DE POTENCIAS DE IGUAL BASE

El **cociente** de potencias de igual base es igual a otra potencia de la misma base y de exponente, la diferencia de los exponentes.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

3.5.3. ELEVAR UNA POTENCIA A OTRA POTENCIA

Para elevar una **potencia** a otra potencia, se deja la misma base y se multiplican los exponentes.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

3.5.4. POTENCIA DE UN PRODUCTO

La potencia de un **producto** es igual al producto de cada uno de los factores elevados al mismo exponente.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

3.5.5. POTENCIA DE UN COCIENTE

La potencia de un **cociente** es igual al cociente de cada uno de los factores elevados al mismo exponente.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

3.5.6. POTENCIAS DE NÚMEROS ENTEROS

Para calcular la **potencia** de un número entero se multiplica la base por sí misma tantas veces como indique el exponente.

4. RADICALES

4.1. RAÍZ CUADRADA. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.

La raíz cuadrada **exacta** de un número *a* es otro número *b* cuyo cuadrado es igual al primero:

$$\sqrt{a} = b \rightarrow b^2 = a$$

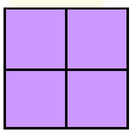
Obtener la raíz cuadrada exacta es la operación opuesta de elevar al cuadrado.

Al signo √ se le denomina **radical**, se llama **radicando** al número a colocado debajo y **valor de la raíz** al numero b.

Es más, aquellos números naturales que no tienen raíz cuadrada exacta, su expresión decimal es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas.

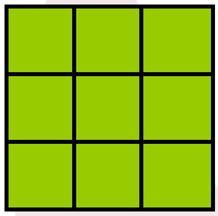
4.1.1. CUADRADOS PERFECTOS

La interpretación gráfica de una raíz cuadrada se ve muy bien con los cuadrados perfectos. Por ejemplo, si queremos construir un cuadrado de lado 2 con cuadrados de lado la unidad, ¿cuántos cuadrados pequeños se necesitan?



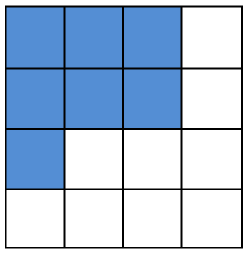
Observando la figura anterior se aprecia que necesitamos 4, por tanto, el 4 es un **cuadrado perfecto**. Observa que $2^2 = 4$.

Veamos otro ejemplo, construyamos ahora un cuadrado de lado 3, ¿cuántos cuadrados pequeños necesitamos?



En este caso necesitamos 9. El 9 es también un cuadrado perfecto, lo que se representa en que $3^2 = 9$.

Por otro lado, el número 7 no es un cuadrado perfecto, no tiene raíz cuadrada exacta porque con 7 cuadrados pequeños no se puede construir un cuadrado.



Es más, aquellos números naturales que no tienen raíz cuadrada exacta, su expresión decimal es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas. Eso sí, se puede afirmar que $2 < \sqrt{7} < 3$.

Como 4 es un cuadrado perfecto $\sqrt{4} = 2$, y 9 es también otro cuadrado perfecto y $\sqrt{9} = 3$, los números, 5, 6, 7, y 8 no son cuadrados perfectos y su raíz cuadrada es un número irracional.

Es importante conocer los cuadrados perfectos, pues mentalmente, te ayuda a saber entre qué valores enteros está la raíz cuadrada que quieres calcular.

4.2. RAÍZ N-ÉSIMA DE UN NÚMERO

La raíz enésima de un número a, es otro número b, cuya potencia enésima es igual al primero.

$$\sqrt[n]{a} = b \rightarrow b^n = a$$

Como ejemplos de esto se pueden poner las siguientes raíces:

Por ser $27 = 3^3$, se dice que 3 es la raíz cúbica de 27, es decir $\sqrt[3]{27} = 3$.

Por ser $16 = 2^4$, se dice que 2 es la raíz cuarta de 16, es decir $\sqrt[4]{16} = 2$.

Observa que, si *n* es un número par, la potencia *n*-ésima de un número, positivo o negativo, es siempre un número positivo, luego no existe la raíz *n*-ésima de un número negativo. Pero si *n* es un número impar, la potencia *n*-ésima de un número, si puede ser negativa.

4.3. RADICALES EQUIVALENTES

Utilizando la notación de exponente fraccionario y la propiedad de las fracciones que dice que si se multiplica numerador y denominador por un mismo número la fracción es equivalente, obtenemos que:

$$a^{m/n} = a^{(k\cdot m)/(k\cdot n)} \rightarrow \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[k\cdot n]{a^{k\cdot m}}$$

Si se multiplican o dividen el índice y el exponente o exponentes del radicando por un mismo número natural, se obtiene otro radical equivalente.

Ejemplo:

Un radical equivalente de $\sqrt{2}$ *es* $\sqrt[6]{2^3}$.

4.4. SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

Si existe un número natural que divida al índice y al exponente (o los exponentes) del radicando, se obtiene un radical simplificado.

Ejemplos:

$\sqrt[6]{\mathbf{256}} = \sqrt[6]{2^8} = \sqrt[3]{2^4}$

$\sqrt[4]{\mathbf{2^6 \cdot 3^{10}}} = \sqrt{2^3 \cdot 3^5}$

4.5. REDUCCIÓN A ÍNDICE COMÚN

Para reducir a común índice dos a más radicales:

1. Hallamos el mínimo común múltiplo de los índices, que será el común índice.
2. Dividimos el común índice por cada uno de los índices y cada resultado obtenido se multiplica por sus exponentes correspondientes.

Ejemplo:

Poner a común índice los radicales: $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2}$; $\sqrt[4]{2^2 \cdot 3^3}$

En primer lugar hallamos el m.c.m. de los índices 2, 3 y 4.

mcm(2, 3, 4) = 12

Dividimos el común índice 12 por cada uno de los índices 2, 3 y 4, y cada resultado obtenido se multiplica por sus exponentes correspondientes.

$\sqrt[12]{2^6}$; $\sqrt[12]{(2^2)^4 \cdot (3^2)^4}$; $\sqrt[12]{(2^2)^3 \cdot (3^3)^3}$

Por último, operamos con las potencias.

$\sqrt[12]{2^6}$; $\sqrt[12]{2^8 \cdot 3^8}$; $\sqrt[12]{2^6 \cdot 3^6}$

4.6. EXTRAER FACTORES DEL RADICAL

Para extraer factores de un radical se descompone el radicando en factores.

4.6.1. EL EXPONENTE DEL RADICANDO ES MENOR QUE EL ÍNDICE

El factor correspondiente se deja en el radicando.

Ejemplos:

$\sqrt{\mathbf{6}}$

puesto que 6 = 2 · 3 y los exponentes de los factores es 1, el cual es menor que el índice 2; así $\sqrt{6}=\sqrt{2\cdot 3}$.

$\sqrt[3]{\mathbf{9}}$

Puesto que 9 = 3^2 *y el exponente 2 es menor que el índice 3; así* $\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3^2}$.

4.6.2. EL EXPONENTE DEL RADICANDO ES IGUAL AL ÍNDICE

El factor correspondiente sale fuera del radicando.

Ejemplos:

$\sqrt{\mathbf{12}}$

Descomponemos 12 en factores, como el 2 está elevado a la misma potencia que el índice podemos extraer el 2 del radicando; así se obtiene $\sqrt{12}=\sqrt{2^2\cdot 3}=2\sqrt{3}$.

$\sqrt[3]{\mathbf{8}}$

Descomponemos 8 en factores, como el 2 está elevado a la misma potencia que el índice podemos extraer el 2 del radicando; así se obtiene $\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$.

4.6.3. EL EXPONENTE DEL RADICANDO ES MAYOR QUE EL ÍNDICE

Se divide dicho exponente por el índice. El cociente obtenido es el exponente del factor fuera del radicando y el resto es el exponente del factor dentro del radicando.

Ejemplos:

$\sqrt{\mathbf{48}}$

El exponente del 2 es mayor que el índice, por tanto se divide dicho exponente 4 entre el índice 2.

$\sqrt{48}=\sqrt{2^4\cdot 3}=2^2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

El cociente obtenido 2 es el exponente del factor fuera del radicando y el resto 0 es el exponente del factor dentro del radicando.

Como el factor 2^0 *es igual a 1, no es necesario colocarlo en el radicando ya que si se multiplica por otro factor este no varía*

En general, si el resultado de dividir el exponente de un factor por el índice da como resto cero, no colocaremos ese factor en el radicando

Descomponemos 8 en factores, como el 2 está elevado a la misma potencia que el índice podemos extraer el 2 del radicando; así se obtiene $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$.

$\boldsymbol{\sqrt[3]{243}}$

Descomponemos en factores: 243 = 3^5

El exponente es mayor que el índice, por tanto se divide dicho exponente 5 entre el índice 3.

El cociente obtenido 1 es el exponente del factor fuera del radicando y el resto 2 es el exponente dentro del radicando

$\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{3^5} = 3\sqrt[3]{3^2} = 3\sqrt[3]{9}$

$\boldsymbol{\sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5^5}}$

Hay exponentes en el radicando mayores que el índice, por tanto se dividen dichos exponentes 2 y 5 por el índice 2.

Cada uno de los cocientes 1 y 2 obtenidos será el exponente del factor correspondiente fuera del radicando y cada uno de los restos obtenidos 0 y 1 serán los exponentes de los factores correspondientes dentro del radicando.

$\sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5^5} = 3 \cdot 5^2 \cdot \sqrt{2 \cdot 5} = 75\sqrt{10}$

4.7. INTRODUCIR FACTORES EN EL RADICAL

Para introducir un número dentro del radical se eleva el número al índice de la raíz y se multiplica por el radicando.

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

Ejemplos:

$\boldsymbol{2\sqrt{3}}$

Como el índice es 2, el factor fuera del radical 2 se eleva al cuadrado y realizamos las operaciones:

$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$

$\boldsymbol{2^2 \cdot 3^3 \sqrt[4]{6}}$

Tanto el 2^2*como el* 3^3*se introducen elevados a la cuarta potencia, es decir:*

$\sqrt[4]{(2^2)^4 \cdot (3^3)^4 \cdot 2 \cdot 3}$

Quitamos los paréntesis multiplicando los exponentes y multiplicamos las potencias con la misma base

$2^2 \cdot 3^3 \sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{2^9 \cdot 3^{13}}$

4.8. OPERACIONES CON RADICALES

Para los radicales se tienen las operaciones de suma, resta, multiplicación, divisón y otras que veremos a continuación:

4.8.1. SUMA Y RESTA DE RADICALES

Solamente pueden **sumarse** (o **restarse**) **dos radicales** cuando son **radicales semejantes**, es decir, si son **radicales** con el **mismo índice** e **igual radicando**.

Para sumar radicales con el mismo índice e igual radicando se se suman los coeficientes de los radicales.

$$a\sqrt[n]{k} + b\sqrt[n]{k} + c\sqrt[n]{k} = (a + b + c)\sqrt[n]{k}$$

Ejemplos:

$\mathbf{2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2}}$

Sumamos y restamos (dependiendo de los signos) los coeficientes de los radicales y tenemos:

$2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = (2 - 4 + 1)\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

$\mathbf{\sqrt[4]{4} + \sqrt[6]{8} - \sqrt[12]{64}}$

Extraemos factores de los radicales y los multiplicamos por el coeficiente del radical correspondiente:

$4 = 2^2,\ \ 8 = 2^3,\ \ \ 64 = 2^8$

De manera que:

$\sqrt[4]{2^2} + \sqrt[6]{2^3} - \sqrt[12]{2^6}$

Simplificamos los radicales. En el primer radical dividimos el índice y el exponente del radicando por 2, en el segundo por 3 y en el tercero por 6:

$\sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2}$

Sumamos los coeficientes de los radicales:

$\sqrt{2}$

$\mathbf{2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + \sqrt{27}}$

Expresamos los radicandos en factores:

$2\sqrt{2^2 \cdot 3} - 3\sqrt{3 \cdot 5^2} + \sqrt{3^3}$

Extraemos factores del radicando:

$4\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$

Sumamos los coeficientes y tenemos:

$-8\sqrt{3}$

4.8.2. MULTIPLICACIÓN DE RADICALES

En la multiplicación tenemos dos casos:

4.8.2.1. Multiplicación de radicales con el mismo índice

Para multiplicar radicales con el mismo índice se multiplican los radicandos y se deja el mismo índice.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Ejemplos:

$\boldsymbol{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}$

Multiplicamos los radicandos:

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{12}$

Cuando terminemos de realizar una operación extraeremos factores del radical, si es posible:

$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$

4.8.2.2. Multiplicación de radicales con el mismo índice

Primero se reducen a común índice y luego se multiplican.

Ejemplos:

$\boldsymbol{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{27}}$

Descomponemos en factores los radicandos:

$\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[4]{3^3}$

Reducimos a común índice por lo que tenemos que calcular el mínimo común múltiplo de los índices, que será el común índice m.c.m. (2, 3, 4) = 12

Dividimos el común índice 12 por cada uno de los índices (2, 3, 4) y cada resultado obtenido se multiplica por sus exponentes correspondientes (1, 2, 3). Realizamos el producto de potencias con la misma base en el radicando y extraemos factores del radicando:

$\sqrt[12]{3^6} \cdot \sqrt[12]{(3^2)^4} \cdot \sqrt[12]{(3^3)^3} = \sqrt[12]{3^6 \cdot 3^8 \cdot 3^9} = \sqrt[12]{3^{23}} = 3\sqrt[12]{3^{11}}$

4.8.3. DIVISIÓN DE RADICALES

En la división tenemos dos casos:

4.8.3.1. División de radicales con el mismo índice

Para dividir radicales con el mismo índice se dividen los radicandos y se deja el mismo índice.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplos:

$$\frac{\sqrt[6]{\mathbf{128}}}{\sqrt[6]{\mathbf{16}}}$$

Como los dos radicales tienen el mismo índice lo ponemos todo en un radical con el mismo índice:

$$\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}} = \sqrt[6]{\frac{128}{16}}$$

Descomponemos en factores, hacemos la división de potencias con la misma base:

$$\sqrt[6]{\frac{2^7}{2^4}}$$

Simplificamos el radical dividiendo el índice y el exponente del radicando por 3:

$$\sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$

4.8.3.2. División de radicales con distinto índice

Primero se reducen a índice común y luego se dividen.

Ejemplos:

$$\frac{\sqrt[3]{\mathbf{4}}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$$

En primer reducimos a común índice por lo que tenemos que calcular el mínimo común múltiplo de los índices, que será el común índice:

m.c.m.(3, 2) = 6:

$$\sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}}$$

Descomponemos el en factores para poder hacer la división de potencias con la misma base y dividimos:

$$\sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{(2^2)^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2}$$

4.8.4. POTENCIA DE UN RADICAL

Para elevar un radical a una potencia, se eleva a dicha potencia el radicando y se deja el mismo índice:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplos:

$$\left(\sqrt[3]{\mathbf{18}}\right)^{\mathbf{2}}$$

Elevamos el radicando al cuadrado, descomponemos 18 en factores y los elevamos al cuadrado y por último extraemos factores:

$$\left(\sqrt[3]{18}\right)^2 = \sqrt[3]{18^2} = \sqrt[3]{(2\cdot 3^2)^2} = \sqrt[3]{2^2\cdot 3^4} = 3\sqrt[3]{12}$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{\mathbf{12}}\cdot\sqrt[4]{\mathbf{18}}}{\sqrt{\mathbf{6}}}\right)^{\mathbf{4}}$$

Elevamos los radicandos a la cuarta, descomponemos en factores los radicandos y extraemos el del radical:

$$\left(\frac{\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[4]{18}}{\sqrt{6}}\right)^4 = \frac{\sqrt[3]{12^4}\cdot\sqrt[4]{18^4}}{\sqrt{6^4}} = \frac{\sqrt[3]{(2^2\cdot 3)^4}\cdot 18}{\sqrt{(2\cdot 3)^4}}$$

En los radicando realizamos las operaciones con potencias y ponemos a común índice para poder efectuar la división:

$$\frac{18\cdot\sqrt[3]{2^8\cdot 3^4}}{\sqrt{2^4\cdot 3^4}} = 18\cdot\sqrt[6]{\frac{(2^8\cdot 3^4)^2}{(2^4\cdot 3^4)^3}} = 18\cdot\sqrt[6]{\frac{2^{16}\cdot 3^8}{2^{12}\cdot 3^{12}}}$$

Simplificamos el radical dividiendo por el índice y los exponentes del radicando y realizamos una división de potencias con el mismo exponente:

$$18\cdot\sqrt[6]{\frac{2^4}{3^4}} = 18\cdot\sqrt[3]{\frac{2^2}{3^2}} = 18\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

4.8.5. RAÍZ DE UN RADICAL

La raíz de un radical es otro radical de igual radicando y cuyo índice es el producto de los dos índices:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

Ejemplos:

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\mathbf{2}}}}$$

Multiplicamos los índices:

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} = \sqrt[24]{2}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}}$$

Multiplicamos los índices:

$$\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}}$$

Introducimos el primer 2 dentro de la raíz cúbica por lo que tendremos que elevarlo al cubo y multiplicamos las potencias con la misma base

$$\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[4]{2}}}=\sqrt{\sqrt[3]{2^3\cdot 2\cdot\sqrt[4]{2}}}=\sqrt{\sqrt[3]{2^4\cdot\sqrt[4]{2}}}$$

Introducimos el 2^4en la raíz cuarta por lo que tenemos que elevarlo a la cuarta, realizamos el producto de potencias y por último el producto de los índices:

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{(2^4)^4\cdot 2}}}=\sqrt[24]{2^{17}}$$

4.8.6. RACIONALIZACIÓN

La racionalización de radicales consiste en quitar los radicales del denominador, lo que permite facilitar el cálculo de operaciones como la suma de fracciones. Podemos distinguir tres casos:

4.8.6.1. Racionalización del tipo $\frac{a}{b\sqrt{c}}$

Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{c}$.

$$\frac{a}{b\sqrt{c}}=\frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}}=\frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\left(\sqrt{c}\right)^2}=\frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\cdot c}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3\sqrt{2}}$$

Multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{2}$:

$$\frac{2}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

Simplificamos

$$\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

4.8.6.2. Racionalización del tipo $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{c}^{\mathbf{m}}}}$

Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$.

$$\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m}\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^{m\cdot}\cdot c^{n-m}}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\cdot c}$$

Ejemplo:

$$\mathbf{\frac{2}{3\sqrt[5]{4}}}$$

El radicando 4 lo ponemos en forma de potencia 2^2:

Tenemos que multiplicar en el numerador y denominador por la raíz quinta de $2^{5-2}=2^3$

Multiplicamos los radicales del denominador, extraemos factores del radical y simplificamos la fracción:

$$\frac{2}{3\sqrt[5]{4}}=\frac{2}{3\sqrt[5]{2^2}}=\frac{2\cdot\sqrt[5]{2^3}}{3\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[5]{2^3}}=\frac{2\cdot\sqrt[5]{2^3}}{3\sqrt[5]{2^2\cdot 2^3}}=\frac{2\cdot\sqrt[5]{2^3}}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt[5]{8}}{3}$$

4.8.6.3. Racionalización del tipo $\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{b}}+\sqrt{\mathbf{c}}}$

Cuando el denominador sea un binomio con al menos un radical. Se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador. El conjugado de un binomio es igual al binomio con el signo central cambiado.

$$a+b\rightarrow a-b$$

$$-a+b\rightarrow -a-b$$

$$a-b\rightarrow a+b$$

$$-a-b\rightarrow -a+b$$

También tenemos que tener en cuenta que: "suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados".

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Ejemplo:

$$\mathbf{\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}}$$

Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador, quitamos paréntesis en el numerador y efectuamos la suma por diferencia en el denominador, por lo que obtenemos una diferencia de cuadrados:

$$\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=-2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

$$\boldsymbol{\frac{2}{4-2\sqrt{2}}}$$

Multiplicamos y dividimos la fracción por el conjugado del denominador:

$$\frac{2}{4-2\sqrt{2}}=\frac{2\left(4+2\sqrt{2}\right)}{\left(4-2\sqrt{2}\right)\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}=\frac{2\left(4+2\sqrt{2}\right)}{16-4\cdot 2}=\frac{2\left(4+2\sqrt{2}\right)}{8}=\frac{4+2\sqrt{2}}{4}$$

Anexo I

Resumen de potencias y radicales

Concepto	Definición	Ejemplos
Potencia	Una potencia a^n de base un número real a y exponente natural n es un producto de n factores iguales a la base	$7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$ 7 es la base y 3 el exponente
Cuadrados y cubos	Las potencias de exponente 2 se cuadrados y las de exponente 3, cubos	7^2 es 7 al cuadrado y 7^3 es 7 al cubo
Potencias de 1 y de 0	Cualquier número distinto de cero elevado a 0 es igual a 1. El número 1 elevado a cualquier número es igual a 1. El número 0 elevado a cualquier número distinto de cero es igual a 0.	$145^0 = 1$ $1^{395} = 1$ $0^{7344} = 0$
Potencias de base 10	Una potencia de base 10 es igual a la unidad seguida de tantos ceros como unidades tiene el exponente. La unidad seguida de ceros es igual a una potencia de 10.	$10^6 = 1\,000\,000$ $10\,000\,000 = 10^7$
Notación científica	Para escribir un número en notación científica se expresa como un número distinto de cero, multiplicado por una potencia de base 10.	$3\,000\,000 = 3 \cdot 10^6$
Producto de potencias de igual base	Para multiplicar potencias de la misma base se deja la misma base y se suman los exponentes.	$9^2 \cdot 9^3 = (9 \cdot 9) \cdot (9 \cdot 9 \cdot 9) = 9^{2+3} = 9^5$
Cociente de potencias de igual base	Para dividir potencias de igual base, se deja la misma base y se restan los exponentes.	$23^8 \,/\, 23^7 = 23^{8-7} = 23^1$
Elevar una potencia a otra potencia	Para calcular la potencia de otra potencia, se deja la misma base y se multiplican los exponentes.	$(5^4)^6 = 5^{4 \cdot 6} = 5^{24}$
Raíz cuadrada	La raíz cuadrada de un número a es otro número b que al elevarlo al cuadrado nos da a.	$\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{81} = 9$
Raíz n-ésima	$\sqrt[n]{a} = b \rightarrow b^n = a$	$\sqrt[3]{8} = 2 \rightarrow 2^3 = 8$
Introducir y extraer factores en radicales	$10\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{10^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2000}$	$\sqrt[4]{405} = \sqrt[4]{81 \cdot 5} = 3\sqrt[4]{5}$

Anexo II

Cálculo de una raíz cuadrada

Para resolver una raíz cuadrada seguiremos los siguientes pasos tomando como ejemplo el:

$$\sqrt{89224}$$

Paso 1: Si el radicando tiene más de dos cifras separamos las cifras en grupos de dos, empezando por la derecha.

$$\sqrt{\underbrace{8}_{3}\ \underbrace{92}_{2}\ \underbrace{24}_{1}}$$

Paso 2: Calculamos la raíz cuadrada entera o exacta, del primer grupo de cifras por la izquierda, en este caso el 8. Para ello nos hacemos la pregunta: ¿qué número elevado al cuadrado da 8? Observamos que 8 no es un cuadrado perfecto, pero está comprendido entre dos cuadrados perfectos: 4 (2^2) y 9 (3^2).

$$2^2 < 8 < 3^2$$

Debido a esto, tomaremos la raíz cuadrada del cuadrado perfecto menor al 8, es decir la raíz cuadrada del 4,quedando 2, y lo colocamos en la casilla correspondiente.

$$\sqrt{8\ 92\ 24}\ \underline{|\ 2\qquad\qquad}$$

Paso 3: El cuadrado de la raíz obtenida 2 (es decir 4) se resta al primer grupo de cifras que aparecen en el radicando (8).

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{8\ 92\ 24} & \underline{2\qquad\qquad} \\ \underline{-4} & \\ \ \ 4 & \end{array}$$

En otras palabras, el cuadrado de 2 es 4, se lo restamos a 8 y obtenemos 4.

Paso 4: Bajamos el siguiente grupo de cifras del radicando, separando del número formado (492) la primera cifra a la derecha (2) y dividiendo lo que resta entre el doble de la raíz 2, es decir 2(2)=4.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{8\ 92\ 24} & \underline{2\qquad\qquad} \\ \underline{-4} & \\ \ \ 4\ 92 & \end{array}$$

En otras palabras:

- Bajamos 92, siendo la cantidad operable del radicando: 492.
- Separamos la 1ª cifra a la derecha (2) y nos quedamos con 49.
- Dividimos 49 entre el doble de la raíz obtenida anteriormente $2 \cdot 2 = 4$
- Como el resultado de 49 : 4 es mayor que 9, tomamos como resultado al 9

<u>Nota:</u> Tomamos 9 siempre que el resultado de la división (49:4) sea mayor que 9.

Paso 5: En otra fila debajo de la raíz colocamos el doble de la misma (4). A continuación, se coloca el cociente que se obtenga (9) . Y luego el número obtenido (49) se multiplica por dicho cociente (9). Después, se resta (441) a la cantidad operable (492) del radicando.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{8\ 92\ 24} & 2 \\ \cline{2-2}
-4 & 49\cdot 9 = 441 \\ \hline
4\ 92 &
\end{array}
$$

En otras palabras:

- Colocamos en otra fila el doble de la raíz, que en este caso es 4.
- Colocamos el cociente obtenido (9) a continuación del 4, obteniendo así el número 49.
- Multiplicamos 49 por 9 y obtenemos 441
- Restamos 441 a 492 (que es la cantidad operable del resultado).

<u>Nota:</u> Si hubiésemos obtenido un valor superior a la a la cantidad operable del radicando, habríamos probado por 8, por 7... hasta encontrar un valor inferior.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{8\ 92\ 24} & 2 \\ \cline{2-2}
-4 & 49\cdot 9 = 441 \\ \hline
4\ 92 & \\
-4\ 41 & \\ \cline{1-1}
51 &
\end{array}
$$

<u>Nota:</u> Si el resultado de hacer 49 · 9 hubiese sido mayor que 492, habríamos probado a hacer 49 · 8, 49 · 7...

Paso 6: El cociente obtenido (9) es la segunda cifra de la raíz, quedando (29).

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{8\ 92\ 24} & 29 \\ \cline{2-2}
-4 & 49\cdot 9 = 441 \\ \hline
4\ 92 & \\
-4\ 41 & \\ \cline{1-1}
51 &
\end{array}
$$

Paso 7: Bajamos el siguiente par de cifras y repetimos los pasos anteriores.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{8\ 92\ 24} & 29 \\ \cline{2-2}
-4 & 49\cdot 9 = 441 \\ \hline
4\ 92 & 589\cdot 9 = 5301 \\ \cline{2-2}
-4\ 41 & \\ \cline{1-1}
51\ 24 &
\end{array}
$$

Como 5301 > 5124, probamos por 8.

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{8\ 92\ 24} & 29 \\ \hline
-4 & 49 \cdot 9 = 441 \\ \hline
4\ 92 & 588 \cdot 8 = 4704 \\ \hline
-4\ 41 & \\ \hline
51\ 24 & \\
-4704 & \\ \hline
420 &
\end{array}$$

finalmente, subimos el 8 a la raíz.

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{8\ 92\ 24} & \color{red}{298} \\ \hline
-4 & 49 \cdot 9 = 441 \\ \hline
4\ 92 & 588 \cdot 8 = 4704 \\ \hline
-4\ 41 & \\ \hline
51\ 24 & \\
-4704 & \\ \hline
\color{green}{420} &
\end{array}$$

y con esto terminamos el proceso.

Paso 8: Prueba de la raíz cuadrada. Para que el resultado sea correcto, se tiene que cumplir:

$$\text{Radicando} = (\text{Raíz entera})^2 + \text{Resto}$$

y efectivamente los valores obtenidos lo cumplen:

$$298^2 + 420 = 89224$$

Anexo III

Áreas y volúmenes

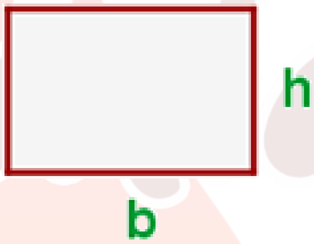
Aunque las fórmulas de las **áreas y los volúmenes de las principales figuras planas y volumétricas** no estás específicamente incluidas dentro del temario de matemáticas de las bases de la oposición del CEIS, es importante conocerlas de cara a resolver gran cantidad de ejercicios. Debido a ello, se detallan en el siguiente anexo las principales que se irán manejando en los ejercicios con los que iremos trabajando.

ÁREAS, PERÍMETROS Y DIAGONALES DE LAS PRINCIPALES FIGURAS PLANAS

Cuadrado

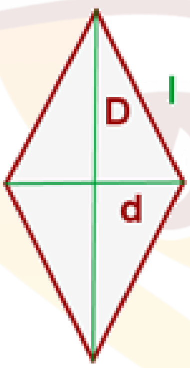
$$A = l^2$$
$$P = 4 \cdot l$$
$$d = \sqrt{2} \cdot l$$

Rectángulo



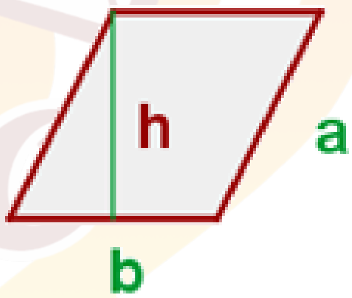
$$A = b \cdot h$$
$$P = 2 \cdot (b + h)$$
$$d = \sqrt{b^2 + h^2}$$

Rombo



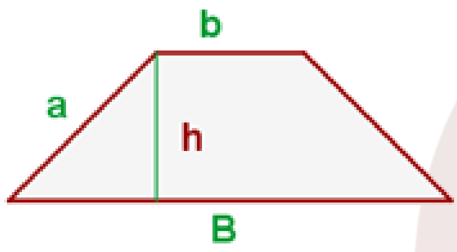
$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$
$$P = 4 \cdot l$$

Romboide



$$A = b \cdot h$$
$$P = 2 \cdot (a + b)$$

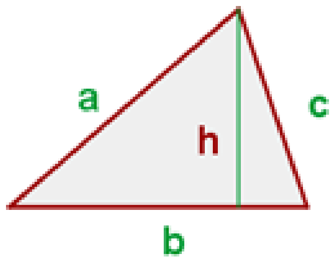
Trapecio



$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

$$P = 2a + B + b$$

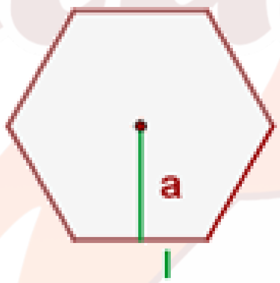
Triángulo



$$A = \frac{b\cdot h}{2}$$

$$P = a + b + c$$

Área y perímetro de un polígono regular



Área de un polígono regular: es igual a la mitad de su perímeto por su apotema:

$$A = \frac{P\cdot a}{2}$$

Perímetro de un polígono regular: es igual a la suma de todos sus lados; como los lados son iguales, entonces para n se tiene que:

$$P = n\cdot l$$

Área de un polígono irregular

Se obtiene triangulando el polígono y sumando el área de dichos triángulos

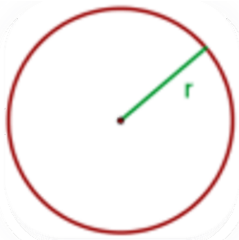
$$A = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$$

ÁREAS Y LONGITUDES DE LA CIRCUNFERENCIA

Área de un círculo

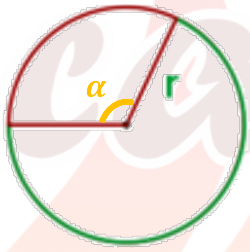
$$A = \pi \cdot r^2$$

Longitud de una circunferencia



$$L = 2 \cdot \pi \cdot r$$

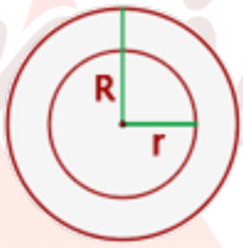
Longitud de un arco de circunferencia



$$L = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha}{360}$$

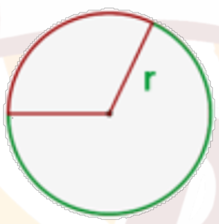
**α en grados sexagesimales*

Área de una corona circular



$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

Área de un sector circular

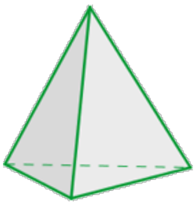


$$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360}$$

**α en grados sexagesimales*

ÁREAS Y VOLÚMENES DE LAS PRINCIPALES FIGURAS VOLUMÉTRICAS

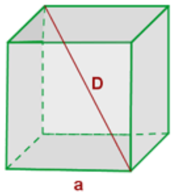
Área y volumen del tetraedro



$$A = \sqrt{3} \cdot a^2$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a^3$$

Áreas y volumen del cubo



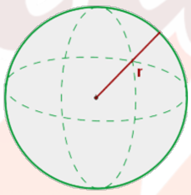
$$D = \sqrt{3} \cdot a$$

$$A_L = 4 \cdot a^2$$

$$A_T = 6 \cdot a^2$$

$$V = a^3$$

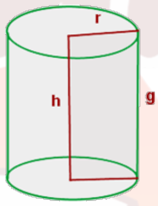
Área y volumen de la esfera



$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Área y volumen del cilindro

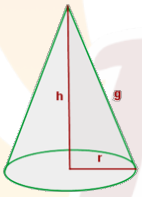


$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

$$A_T = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (h + r)$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Área y volumen del cono



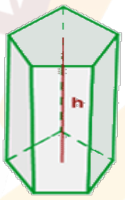
$$g^2 = r^2 + h^2$$

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g$$

$$A_T = \pi \cdot r \cdot (g + r)$$

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

Área y volumen del prisma



$$P_B = \text{Perímetro de la base}$$

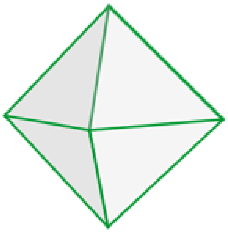
$$A_L = P_B \cdot h$$

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B$$

$$V = A_B \cdot h$$

ÁREAS Y VOLÚMENES DE OTRAS FIGURAS VOLUMÉTRICAS

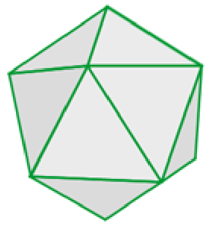
Área y volumen del octaedro



$$A = 2\sqrt{3} \cdot a^2$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a^3$$

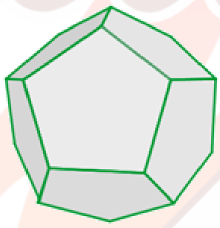
Área y volumen del icosaedro



$$A = 5 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$$

$$V = \frac{5}{12} \cdot \left(3 + \sqrt{5}\right) \cdot a^3$$

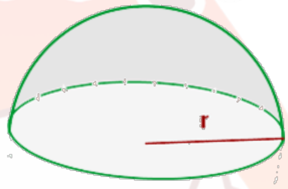
Área y volumen del dodecaedro



$$A = 30 \cdot a \cdot \text{apotema}$$

$$V = \frac{1}{4} \cdot \left(15 + 7\sqrt{5}\right) \cdot a^3$$

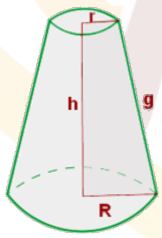
Área y volumen de la semiesfera



$$A = 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Área y volumen del tronco de cono

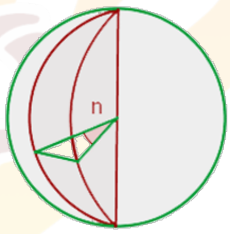


$$A_L = \pi \cdot (R + r) \cdot g$$

$$A_T = \pi[g \cdot (R + r) + R^2 + r^2]$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r)$$

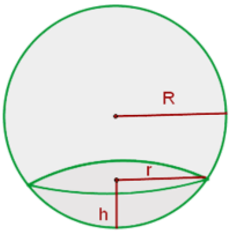
Área del huso esférico y volumen de la cuña esférica



$$A = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^2}{360} \cdot n$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi \cdot r^3}{360} \cdot n$$

Área y volumen del casquete esférico

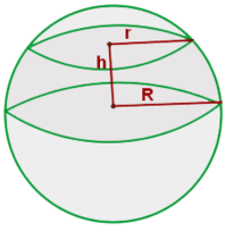


$$R = \frac{r^2 + h^2}{2h}$$

$$A = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot (3R - h)$$

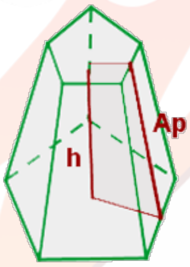
Área y volumen de la zona esférica



$$A = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot h \cdot (h^2 + 3 \cdot R^2 + 3 \cdot r^2)$$

Área y volumen del tronco de pirámide



$P =$ Perímetro de la base mayor

$P' =$ Perímetro de la base menor

$Ap =$ Apotema del tronco de pirámide

$A =$ Área de la base mayor

$A' =$ Área de la base menor

$$A_L = \frac{P + P'}{2} \cdot A_P$$

$$A_T = \frac{P + P'}{2} \cdot A_P + A + A'$$

$$V = \frac{h}{3} \cdot \left(A + A' + \sqrt{A \cdot A'}\right)$$