SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS

TEMA 9

SUCESIONES. SUCESIONES ARITMÉTICAS. SUCESIONES GEOMÉTRICAS. DETERMINACIÓN DE UNA SUCESIÓN. SUCESIÓN DE FIBONACCI. OPERACIONES CON SUCESIONES.

TEMA 10

PROGRESIONES. PROGRESIÓN ARITMÉTICA. PROGRESIÓN GEOMÉTRICA.

"Aquellos que quieren conocer el arte de calcular, sus sutilezas e ingenuidades, deben saber computar con las figuras de la mano. Con estas nueve figuras y el signo 0, llamado zephyrum, se puede escribir el número que sea."

Leonardo de Pisa o Fibonacci (1170-1240)

Ejercicio 1

Escribe los 4 primeros términos de las sucesiones siguientes e indica si son progresiones aritméticas, progresiones geométricas o sucesiones de otro tipo.

a) $a_n = 3 \cdot 3^n$

b) $a_n = 5n + 7$

c) $a_n = 3 \cdot 3^n - 1$

d) $a_n = \frac{(-1)^n + 2n}{3n}$

a) $a_1 = 9$; $a_2 = 27$; $a_3 = 81$; $a_4 = 243$

Se trata de una progresión geométrica de razón 3.

b) $a_1 = 12$; $a_2 = 17$; $a_3 = 22$; $a_4 = 27$

Se trata de una progresión aritmética de diferencia 5.

c) $a_1 = 8$; $a_2 = 26$; $a_3 = 80$; $a_4 = 242$

Se trata de una sucesión de otro tipo.

d) $a_1 = \frac{1}{3}$; $a_2 = \frac{5}{6}$; $a_3 = \frac{5}{9}$; $a_4 = \frac{3}{4}$;

Se trata de una sucesión de otro tipo.

Ejercicio 2

1. En una progresión aritmética sabemos que $a_2 = 1$ y $a_5 = 7$. Halla el término general y calcula la suma de los 15 primeros términos.

   Término general: $a_n = 2n - 3$

   $S_{15} = 195$

2. En una progresión aritmética, el sexto término vale 10,5; y la diferencia es 1,5. Calcula el primer término y la suma de los 9 primeros términos.

   $a_1 = 3$

   $S_9 = 81$

3. El quinto término de una progresión aritmética vale –7, y la diferencia es –3. Calcula el primer término y la suma de los 12 primeros términos.

   $a_1 = 5$

   $S_{12} = .138$

4. Calcula la suma de los 15 primeros términos de una progresión aritmética en la que $a_3 = 1$ y $a_7 = -7$.

   Término general: an= a1· r(n-1)

   Se trata de una sucesión geométrica de razón r=0,5

   a10= $\frac{1}{2^{10}}$ y a100=$\frac{1}{2^{100}}$

5. Halla la suma de los 16 primeros términos de una progresión aritmética en la que $a_4 = 7$ y $a_7 = 16$.

   $S_{16} = 328$

Ejercicio 3

1. En una progresión geométrica, $a_1 = 3$ y $a_4 = 24$. Calcula la razón y la suma de los ocho primeros términos.

   $r = 2$

   $S_8 = 765$

2. Halla la suma de los seis primeros términos de una progresión geométrica de razón positiva en la que $a_2 = 10$ y $a_4 = 250$.

   $S_6 = 7812$

3. El tercer término de una progresión geométrica vale 80, y la razón es 4. Calcula la suma de los cinco primeros términos.

   $S_5 = 1705$

4. En una progresión geométrica sabemos que $a_1 = 2$ y $a_4 = 54$. Halla la razón y la suma de los seis primeros términos.

   $r = 3$

   $S_5 = 728$

5. En una progresión geométrica $a_2 = 6$ y $r = 0,5$; calcula la suma de todos sus términos.

   $S_\infty = 24$

Ejercicio 4

Resuelve las siguientes progresiones o sucesiones:

a) En una progresión aritmética, sabemos que el sexto término es 28 y que la diferencia es 5. Calcular el término general y los 5 primeros términos.

b) Encontrar el término general de la sucesión: **20**, **19.3**, **18.6**, **17.9** ... ¿Es aritmética o geométricas? Encontrar los términos: décimo, vigésimo y trigésimo.

c) En una progresión aritmética, sabemos que el primer término es 1 y la suma de los 10 primeros términos es 63. Calcular el término general.

d) Encontrar el término general de la sucesión: **0.5, 0.25, 0.125, 0.0625** ... ¿Es aritmética o geométrica? Calcular los *n*-ésimos para los valores de *n*=10, 100.

e) La suma de los *n* números naturales consecutivos a partir del 55 (sin incluirlo) vale 738. Encontrar *n*.

f) En una progresión aritmética, la suma de los dos primeros términos es 12 y la suma del primero con el tercero es 30. Hallar el término general y calcular la suma de los cinco primeros términos.

a) Término general: $a_n = 3 + (n-1) \cdot 5$

$a_1 = 3$; $a_2 = 8$; $a_3 = 13$; $a_4 = 18$ y $a_5 = 23$

b) Término general: $a_n = 20 + 0,7 \cdot (n-1)$
$a_{10} = 13,7$; $a_{20} = 6,7$ y $a_3 = - 0,3$

c) Término general: $a_n = 1 + \frac{53}{45} \cdot (n - 1)$

d) Término general: $a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$
Se trata de una sucesión geométrica de razón r=0,5
$a_{10} = \frac{1}{2^{10}}$ y $a_{100} = \frac{1}{2^{100}}$

e) n=12

f) Término general: $a_n = -3 + 18\ (n - 1)$
$S_5 = 165$

Ejercicio 5

Resuelve los siguientes supuestos:

a) Una progresión geométrica comienza en 1 y tiene razón 2. Encontrar los tres términos consecutivos (de la sucesión) cuyo producto es 512.

b) Calcular la suma de los tres primeros términos de una sucesión geométrica de razón 0.5 sabiendo que su producto es 1000.

c) Encontrar el término general de la sucesión: **1, -2, 4, -8, 16** … ¿Es aritmética o geométrica?

d) Calcular la suma de los múltiplos de 13 comprendidos entre los números de 500 y 7800 inclusive.

a) $a_3 = 4$; $a_4 = 8$ y $a_5 = 16$

b) $S_3 = 35$

c) Término general: $a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)} = (-2)^{n-1}$

d) $S_5 = 2334267$

Academia Pyro

Ejercicio 6

Resuelve los siguientes ejercicios:

a) El sueldo de un trabajador es de 950 € mensuales y cada año se incrementa en 50 € (cada mes). Calcular cuánto dinero ganará en los 10 años siguientes.

b) Calcular la suma de todos los números impares comprendidos entre 100 y 200.

c) Calcular el valor del parámetro a para que los números *a+2*, *3a+2*, *9a-2* sean los tres primeros términos de una progresión geométrica.

a) S_{10}= 141.000 €

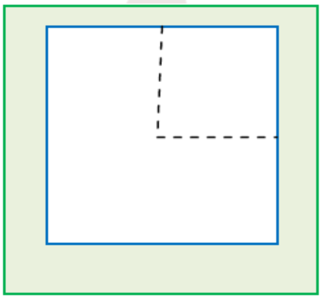
b) S_{50}= 7500

c) a= 2

Academia Pyro

Ejercicio 7

Tenemos un cuadrado en un área 1 en la mano, y lo cortamos por las líneas de puntos como indica la figura.



El trozo mayor lo dejamos sobre la mesa y nos quedamos en la mano con el cuadrado, al que volvemos a cortar de la misma forma. Y así sucesivamente. ¿Qué área tienen los sucesivos cuadrados que tengo en la mano? ¿Crece o disminuye? Escribe el término general de la sucesión de áreas que tenemos en la mano. ¿Y los recortes que quedan sobre la mesa? ¿Crece el área sobre la mesa o disminuye? Vamos sumando áreas, calcula la suma de estas áreas si hubiéramos hecho infinitos cortes.

Solución:

¿Qué área tienen los sucesivos cuadrados que tengo en la mano?

Los sucesivos cuadrados tienen $\frac{1}{4}$ del área del cuadrado recortado anterior.

¿Crece o disminuye?

Disminuye.

Escribe el término general de la sucesión de áreas que tenemos en la mano.

$$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

¿Y los recortes que quedan sobre la mesa?

Los sucesivos recortes que dejamos sobre la mesa tienen $\frac{3}{4}$ del área del cuadrado recortado anterior.

¿Crece el área sobre la mesa o disminuye?

Crece, aunque nunca superará el valor del área del cuadrado inicial de 1.

Vamos sumando áreas, calcula la suma de estas áreas si hubiéramos hecho infinitos cortes.

La cantidad de papel que se deja sobre la mesa: $a_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \cdots + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4^n}\right)$. Se aproximaba a 1 tanto como queramos, pero nunca llega a ser 1.

Ejercicio 8

Resuelve los siguientes supuestos:

a) Depositamos en un banco 1500 € al 3,5 % de capitalización compuesta durante tres años. ¿Cuánto dinero tendríamos al finalizar el tercer año?

b) Un empresario acude a una entidad financiera para informarse sobre cómo invertir los 6000 € de beneficios que ha tenido en un mes. Le plantean dos opciones: mantener ese capital durante 5 años al 3,5 % anual o recibir el 5 % del capital durante los dos primeros años y el 3 % los tres años restantes. ¿Qué opción le interesa más?

a) $C_t = 1663{,}08$ €

b) Mejor la opción B con la que obtendrá 1140 €, frente a los 1050 € de la opción A.

Ejercicio 9

Según una leyenda, un rico brahmán ordenó a su sirviente, Sisa, que creara un juego para que pudiera entretenerse. Sisa le presentó el tablero de ajedrez y el brahmán quedó tan satisfecho que le dejó escoger su recompensa. Así pues, le pidió que le pagara con un grano de trigo por el primer casillero del tablero, dos por el segundo, cuatro por el tercero, ocho por el cuarto, etc., hasta llegar a los 64 casilleros. Calcular a cuántos granos de trigo ascendía la recompensa.

La recompensa asciende a un total de $2{,}928054615 \cdot 10^{17}$ granos de trigo.

Ejercicio 10

Un negocio alquila un local por 3.000 € el primer año. Según el contrato, la renta aumentará en 100 € cada año.

a) ¿Cuánto se deberá pagar en el décimo año?

$$a_{10} = 3900$$

b) Calcula el monto total abonado por el alquiler durante esos 10 años.

$$S_{10} = 34500$$

Ejercicio 11

A las 9 de la mañana, una persona cuenta a tres amigos un secreto. Media hora después, cada uno de estos tres amigos cuenta el secreto a otras tres personas. Media hora más tarde, cada uno de éstos cuenta el secreto a otras tres personas y así sucesivamente. Calcular cuántas personas saben el secreto a las 9 de la noche suponiendo que cada persona solo cuenta el secreto a otras tres personas y a nadie más durante el día y que ninguno ha recibido la información varias veces.

A las 21:00 horas han pasado 24 veces media hora, por tanto: $a_{24} = 3^{24}$.

A esto debemos sumarle la primera persona que conocía el secreto. En conclusión el resultado es $3^{24} + 1$.

Ejercicio 12

Calcular el término general C_n de la suma de las sucesiones, completar la siguiente tabla y calcular el décimo término de la suma:

$\mathbf{a_n}$	3	6	9	12	…	3n
$\mathbf{b_n}$	2	4	6	8	…	2n
$\mathbf{a_n + b_n}$					…	

Solución:

$\mathbf{a_n}$	3	6	9	12	…	3n
$\mathbf{b_n}$	2	4	6	8	…	2n
$\mathbf{a_n + b_n}$	5	10	15	20	…	5n

Término general: $C_n = a_n + b_n$; $C_n = 5n$

$C_{10} = 50$

Ejercicio 13

Calcular el término general C_n de la resta de las sucesiones, completar la siguiente tabla y calcular el décimo término de la resta:

$\mathbf{a_n}$	1	3	5	7	…	2n – 1
$\mathbf{b_n}$	1	4	7	10	…	3n – 2
$\mathbf{a_n - b_n}$					…	

Solución:

$\mathbf{a_n}$	1	3	5	7	…	2n – 1
$\mathbf{b_n}$	1	4	7	10	…	3n – 2
$\mathbf{a_n - b_n}$	0	-1	-2	-3	…	-n + 1

Término general: $C_n = a_n - b_n$; $C_n = -n + 1$

$C_{10} = -9$

Ejercicio 14

Calcular el término general C_n del producto de las sucesiones, completar la siguiente tabla y calcular el décimo término del producto:

$\mathbf{a_n}$	1	2	3	4	…	n
$\mathbf{b_n}$	1	1/2	1/3	1/4	…	1/n
$\mathbf{a_n \cdot b_n}$					…	

Solución:

$\mathbf{a_n}$	1	2	3	4	…	n
$\mathbf{b_n}$	1	1/2	1/3	1/4	…	1/n
$\mathbf{a_n \cdot b_n}$	1	1	1	1	…	1

Término general: $C_n = a_n \cdot b_n$; $C_n = \frac{n}{n}$; $C_n = 1$

$C_{10} = 1$

Ejercicio 15

Calcular el término general $\frac{1}{a_n}$ de la inversa de la sucesión, completar la siguiente tabla y calcular el décimo término de la inversa:

$\mathbf{a_n}$	2/3	3/4	4/5	5/6	…	$\boldsymbol{\frac{n+1}{n+2}}$
$\boldsymbol{\frac{1}{a_n}}$						

Solución:

$\mathbf{a_n}$	2/3	3/4	4/5	5/6	…	$\boldsymbol{\frac{n+1}{n+2}}$
$\boldsymbol{\frac{1}{a_n}}$	3/2	4/3	5/4	6/5		$\boldsymbol{\frac{n+2}{n+1}}$

Término general: $C_n=\frac{1}{a_n}$; $C_n=\frac{n+2}{n+1}$

$C_{10}=\frac{10+2}{10+1}$; $C_{10}=\frac{12}{11}$

Ejercicio 16

Calcula los 15 primeros términos de la sucesión de Fibonacci. ¿Es una sucesión aritmética? ¿Y geométrica? ¿Por qué? ¿Es una sucesión creciente, decreciente o alternada? ¿Por qué?

$a_0 = 0$	$a_1 = 1$	$a_2 = 1$	$a_3 = 2$	$a_4 = 3$
$a_5 = 5$	$a_6 = 8$	$a_7 = 13$	$a_8 = 21$	$a_9 = 34$
$a_{10} = 55$	$a_{11} = 89$	$a_{12} = 144$	$a_{13} = 233$	$a_{14} = 377$

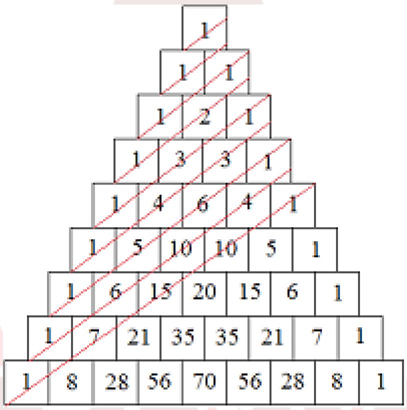
La sucesión de Fibonacci no es ni aritmética ni geométrica, porque no existe ni una diferencia ni una razón que se mantenga constante en toda la sucesión.

Se trata de una sucesión creciente. Como cada término (a partir del tercero) se obtiene sumando los dos términos anteriores, cada término es mayor o igual que el anterior.

Ejercicio 17

Para construir el triángulo de Pascal se escriben 1's en los dos lados del triángulo y se completa cada hueco sumando los dos números que tiene encima.

En la figura se han trazado en rojo las diagonales de un triángulo de Pascal con 9 filas. ¿Cuánto suman los números de cada diagonal?



Las sumas de los números de las diagonales son 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 y 34. Se trata de la sucesión de Fibonacci.

Ejercicio 18

Un bombero debe seguir un tratamiento para recuperarse después de una intensa jornada de trabajo. El primer día toma una dosis de 100 mg, y cada día la cantidad se reduce en 5 mg. El tratamiento dura 12 días. ¿Cuántos miligramos en total deberá tomar durante todo el tratamiento?

870 miligramos.

Academia Pyro

Ejercicio 19

Un equipo de científicos estudia una colonia de microorganismos que se duplica cada 15 minutos. Si comienza con una sola célula, ¿cuántos microorganismos habrá después de 6 horas?

8 388 608 microorganismos habrá después de 6 horas

Ejercicio 20

Un equipo de bomberos está organizando una celebración especial en honor a un compañero que se jubila. Para ello, han encargado a Javier, el repostero, una tarta de varios niveles circulares. Javier les propone un diseño en el que cada piso tenga un diámetro 5 cm menor que el nivel inferior. Sin importar cuántos pisos tenga, el superior siempre tendrá un diámetro de 20 cm.

a) Uno de los bomberos sugiere que la tarta tenga 15 pisos. ¿Qué diámetro deberá tener la base de la tarta?

Se trata de una progresión aritmética de primer término 20 y diferencia 5.

$a_{15} = 90$ cm

b) A la hora de repartir la tarta, cada piso se colocará en fila sobre una mesa. ¿Qué longitud mínima deberá tener la mesa para acomodarlos sabiendo que entre piso de tarta y piso de tarta se dejaran 20 centímetros?

$S_{15} = 1105$ cm $= 11{,}05$ m

c) Para decorarla, se colocarán fresas siguiendo un patrón: 1 en el piso superior, 2 en el siguiente, 4 en el anterior y así sucesivamente. ¿Cuántas fresas serán necesarias en total??

Progresión geométrica cuyo primer término es 1 y su razón es 2.

$S_{15} = 2^{15} - 1 = 32\,767$ fresones