

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS

TEMA 7

ECUACIÓN DE LA RECTA. ECUACIÓN DE LA
RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS.
MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO.

TEMA 8

ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA.



“La matemática universal debe tratar de un método exacto de determinación de las cosas que caen bajo el poder de la imaginación. Es, por así decirlo, una lógica de la imaginación.”

Gottfried Leibniz (1646 - 1716)

Ejercicio 1

1) Dados los puntos A(0, 2), B(3, 4) y C(7,-3) calcula:

a) Distancia entre los puntos A y B.

$$\sqrt{13}$$

b) Módulo entre B y C.

$$\sqrt{65}$$

c) Módulo del segmento $\overline{CA}$.

$$\sqrt{74}$$

2) Calcula la distancia entre el punto P(2, 3) y la recta $r \equiv x + 4y - 10 = 0$.

$$\frac{4\sqrt{13}}{17}$$

3) Calcula la distancia de la recta $r \equiv 3x - 5y + 10 = 0$ al origen de coordenadas.

$$\frac{5\sqrt{34}}{17}$$

4) Calcula la distancia entre las rectas $r \equiv x - 2y - 3 = 0$ y $s \equiv x - 2y + 1 = 0$

$$\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Ejercicio 2

Dados los puntos $P(3, 9)$ y $Q(8, -1)$:

- a) Halla el punto medio de PQ.

$$\left(\frac{11}{2}, 4\right)$$

- b) Halla el simétrico de P respecto de Q.

$$(13, -11)$$

- c) Halla el simétrico de Q respecto de P.

$$(-2, 19)$$

- d) Obtén un punto A de PQ tal que $\frac{\overline{PA}}{\overline{AQ}} = \frac{2}{3}$.

$$(5, 5)$$

- e) Obtén un punto B de PQ tal que $\frac{\overline{PB}}{\overline{PQ}} = \frac{1}{5}$.

$$(4, 7)$$

Ejercicio 3

a) Averigua m para que $P(3, -4)$, $Q(10, 5)$ y $R(m, 0)$ estén alineados.

$$m = \frac{55}{9}$$

b) Averigua si están alineados los puntos $P(7, 11)$, $Q(4, -3)$ y $R(10, 25)$.

Están alineados.



Ejercicio 4

Consideremos la recta $5x + 2y - 7 = 0$. Calcula su pendiente, un punto y un vector director.

Pendiente (m): La forma general de la ecuación de la recta es $Ax + By + C = 0$. La pendiente m se calcula como $m = -\frac{A}{B}$.

Para la recta $5x + 2y - 7 = 0$

$$m = -\frac{5}{2}$$

Un punto: Para encontrar un punto por donde pasa la recta, podemos tomar $x = 0$ y resolver para y :

$$5(0) + 2y - 7 = 0 \Rightarrow 2y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{2}$$

Un punto es $(0, \frac{7}{2})$.

Vector director: El vector director de la recta se obtiene de los coeficientes de x e y . Si la recta es $Ax + By + C = 0$, el vector director es $(B, -A)$.

Para $5x + 2y - 7 = 0$:

$$\text{Vector director} = (2, -5)$$

Ejercicio 5

Dada la recta con ecuación general:

$$3x - 4y + 7 = 0$$

- a) Encuentra un vector perpendicular a esta recta.

$$(3, -4)$$

- b) Escribe la ecuación de una recta que pase por el punto $P(2,1)$ y sea perpendicular a la dada.

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$$

- c) Encuentra la intersección entre ambas rectas.

$$\left(\frac{23}{25}, \frac{61}{25}\right)$$

Ejercicio 6

Determina las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos P (2, -3) y Q (4, 5).

Paramétrica: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 + 8t \end{cases}$

Continua: $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{8}$



Ejercicio 7

Obtén todas las formas posibles de la ecuación de la recta que pasa por A(-2, 5) y B (3, -5).

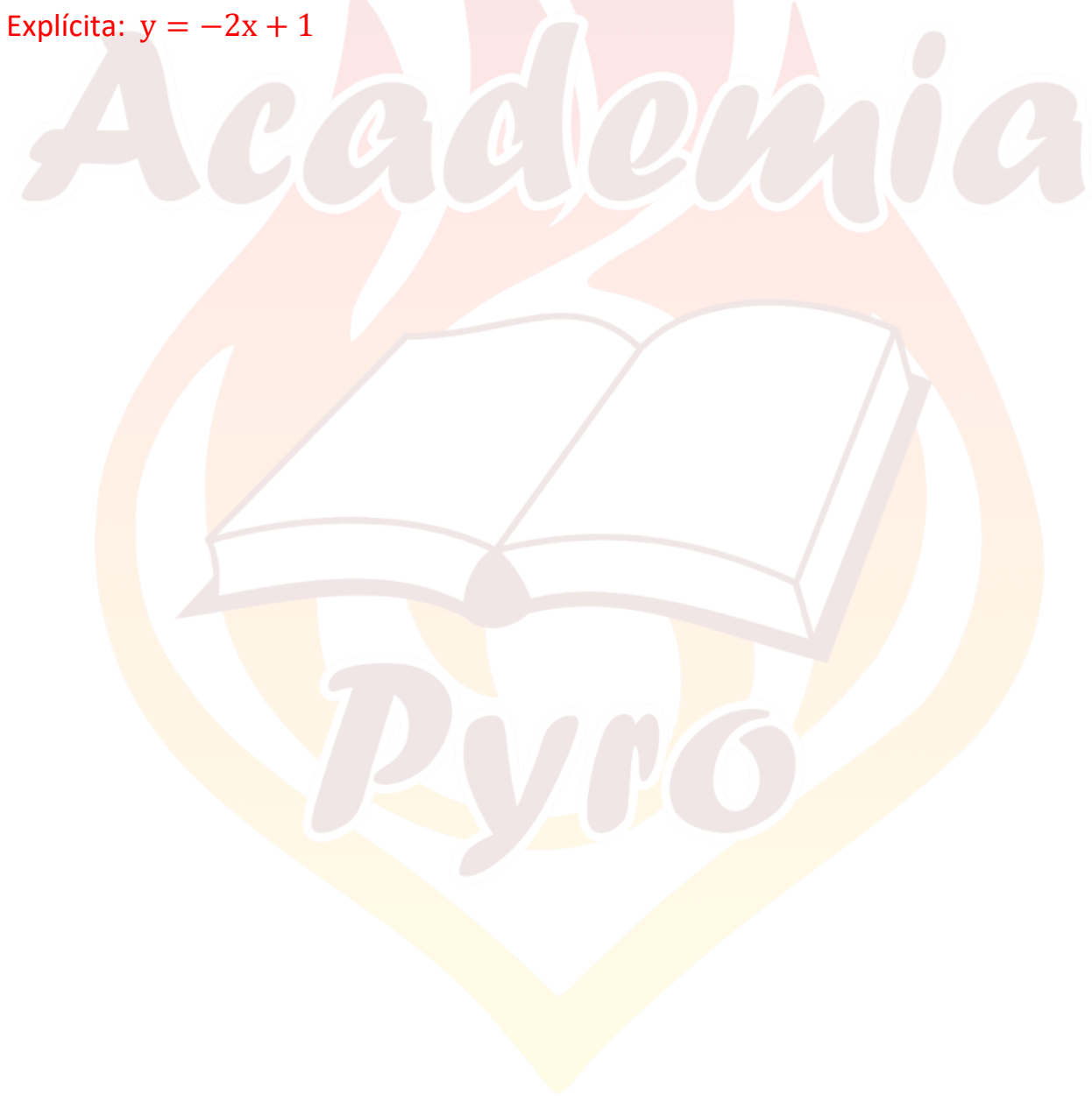
Paramétrica:
$$\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 5 - 10t \end{cases}$$

Continua:
$$\frac{x+2}{5} = \frac{y-5}{-10}$$

Punto pendiente:
$$y - 5 = -2(x + 2)$$

Implícita o general:
$$2x + y - 1 = 0$$

Explícita:
$$y = -2x + 1$$



Ejercicio 8

a) Escribe la ecuación de la recta, r , que pasa por los puntos $(0, 2)$ y $(-2, -1)$.

La fórmula de la pendiente m entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 2}{-2 - 0} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

Usando la forma punto-pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$:

$$y - 2 = \frac{3}{2}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 2$$

La ecuación es $y = \frac{3}{2}x + 2$.

b) Obtén la ecuación de la recta perpendicular a $y + 1 = 0$ que pasa por $(-3, 2)$.

La recta $y + 1 = 0$ es horizontal (pendiente $m = 0$). La recta perpendicular será vertical, es decir, tendrá una forma $x = k$.

Como pasa por $(-3, 2)$:

$$x = -3$$

Ejercicio 9

a) Halla la ecuación de la recta, r , paralela a $3x + 2y + 4 = 0$, que pasa por $(1, -2)$.

Las rectas paralelas tienen la misma pendiente. La pendiente de la recta $3x + 2y + 4 = 0$ es:

$$m = -\frac{3}{2}$$

Usamos la forma punto-pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$:

$$y + 2 = -\frac{3}{2}(x - 1) \Rightarrow y + 2 = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} - 2$$

La ecuación es $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

b) Halla la ecuación de la mediatriz del segmento definido por los puntos A $(-5,3)$ y B $(2,7)$.

Primero, encontramos el punto medio (x_m, y_m) :

$$x_m = \frac{-5 + 2}{2} = -\frac{3}{2}, y_m = \frac{3 + 7}{2} = 5$$

La pendiente del segmento AB es:

$$m_{AB} = \frac{7 - 3}{2 + 5} = \frac{4}{7}$$

La pendiente de la mediatriz (perpendicular) es:

$$m_{\text{mediatriz}} = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{7}{4}$$

Usamos la forma punto-pendiente para la mediatriz que pasa por $(-1.5, 5)$:

$$y - 5 = -\frac{7}{4}(x + 1.5) \Rightarrow y = -\frac{7}{4}x - \frac{21}{8} + 5 \Rightarrow y = -\frac{7}{4}x + \frac{19}{8}$$

La ecuación es $y = -\frac{7}{4}x + \frac{19}{8}$

Ejercicio 10

- a) Escribe la ecuación de la recta, r , que pasa por el punto $(-3, 1)$ y es paralela a $y = -2x + 5$.

La pendiente de la recta dada es $m = -2$. Usamos la forma punto-pendiente:

$$y - 1 = -2(x + 3) \Rightarrow y = -2x - 6 + 1 \Rightarrow y = -2x - 5$$

La ecuación es $y = -2x - 5$.

- b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a $y = 3x + 1$ que pasa por el punto $(0, 0)$.

La pendiente de la recta dada es $m = 3$. La pendiente de la recta perpendicular es:

$$m_{\text{perpendicular}} = -\frac{1}{3}$$

Usamos la forma punto-pendiente:

$$y - 0 = -\frac{1}{3}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x$$

La ecuación es $y = -\frac{1}{3}x$

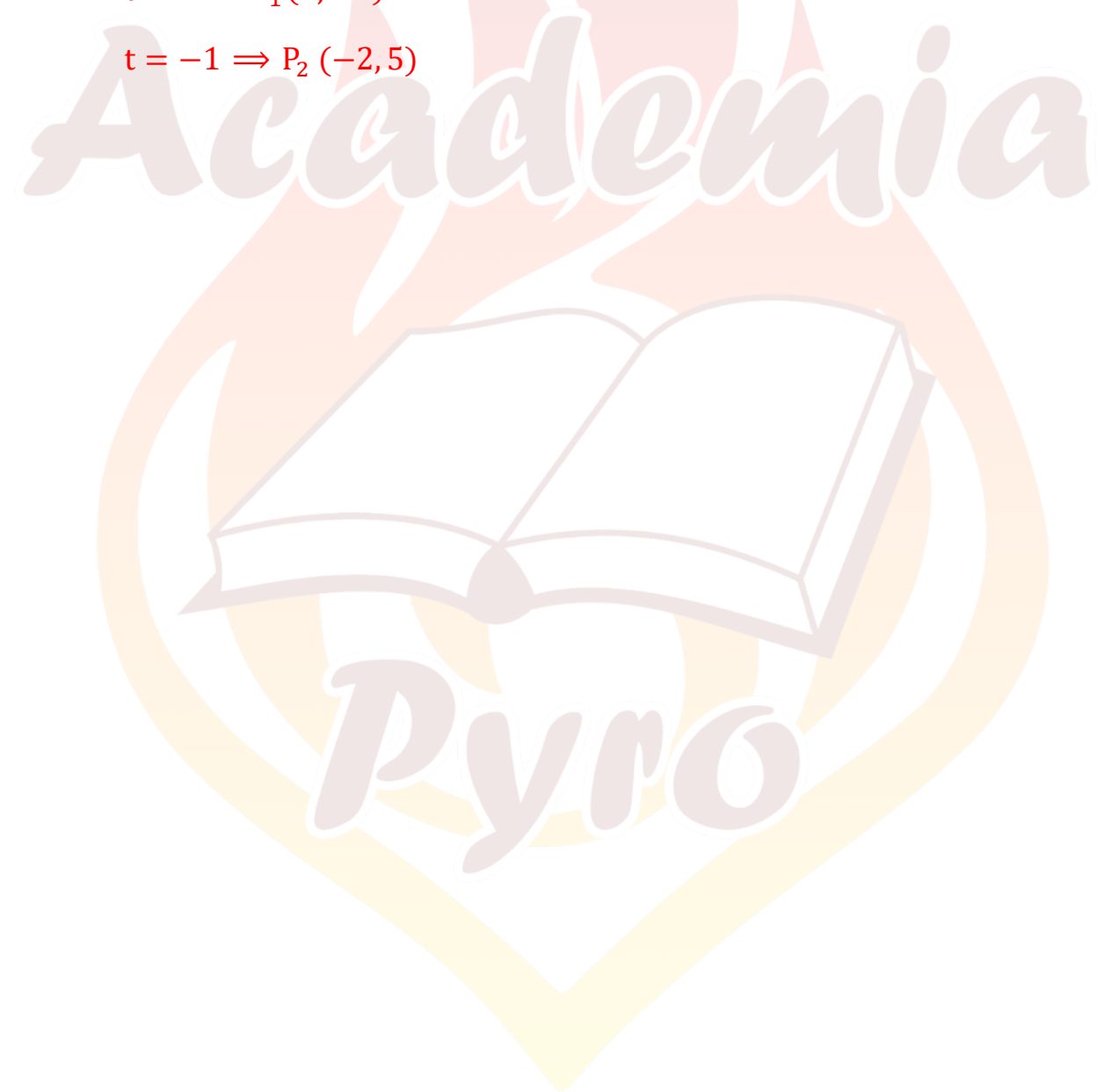
Ejercicio 11

Una recta pasa por los puntos A (1, 2) y B (4, -1). Calcula la ecuación vectorial y la ecuación paramétrica de dicha recta, y encuentra otros dos puntos.

- Vector director: $\vec{v} = (4 - 1, -1 - 2) = (3, -3)$
- Ecuación vectorial: $\vec{r}(k) = (1, 2) + k(3, -3)$
- Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 2 - 3k \end{cases}$
- Otros dos puntos (usando $k = 1$ y $k = -1$):

$$k = 1 \Rightarrow P_1 (4, -1)$$

$$k = -1 \Rightarrow P_2 (-2, 5)$$



Ejercicio 12

Calcula una recta perpendicular a $x + 2y = 5$ que pase por $(2, 0)$. Exprésala al menos en tres formas.

Pendiente de la recta dada:

$$m = -\frac{1}{2}$$

Pendiente de la perpendicular:

$$m_{\text{perpendicular}} = 2$$

Forma punto-pendiente:

$$y - 0 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 4$$

Forma general:

$$y - 2x + 4 = 0$$

Forma explícita:

$$y = 2x - 4$$

Ejercicio 13

Calcula la distancia entre el punto P (1, -2) y la recta $r = \{(x, y) = (-2, 2) + k(\overrightarrow{4, 2})\}$.

Para calcular la distancia punto-recta tenemos la fórmula:

$$d_{\text{punto-recta}} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Por lo que tendríamos que pasar la recta de la ecuación vectorial que nos han dado en el enunciado a su ecuación implícita de la forma $Ax + By + C = 0$.

$$r = \{(x, y) = (-2, 2) + k(\overrightarrow{4, 2})\} \rightarrow \begin{cases} x = -2 + 4k \\ y = 2 + 2k \end{cases}$$

Despejando k e igualando obtenemos la recta en su forma implícita:

$$\begin{cases} x = -2 + 4k \\ y = 2 + 2k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k = \frac{x+2}{4} \\ k = \frac{y-2}{2} \end{cases} \rightarrow \frac{x+2}{4} = \frac{y-2}{2} \rightarrow 2x+4 = 4y-8 \rightarrow 2x-4y+12=0$$

Ahora sí que podemos usar la formula anterior de la distancia. La distancia entre el punto P (1, -2) y la recta $r: 2x - 4y + 12 = 0$ es:

$$d(P, r) = \frac{|2 \cdot 1 + (-4) \cdot (-2) + 12|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{|2 + 8 + 12|}{\sqrt{4 + 16}} = \frac{|22|}{\sqrt{20}} = \frac{22}{2\sqrt{5}} = \frac{11}{\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{5}$$

Ejercicio 14

Calcula el punto simétrico de P (1, -2) respecto a la recta $\vec{r}(k) = \{(x, y) = (-2, 2) + k(\overrightarrow{4, 2})\}$.

Para calcular el punto simétrico calculo el punto intersección entre la recta r dada y la recta perpendicular a esta y que pasa por el punto P(1, -2).

La recta $\vec{r}(k) = \{(x, y) = (-2, 2) + k(\overrightarrow{4, 2})\}$ está dada en su forma vectorial. El vector director de esta recta es (4, 2). Un vector perpendicular a un vector dado (a,b) es un vector (b,-a) o (-b,a).

Para el vector director (4,2), los vectores perpendiculares pueden ser: (2,-4) o (-2,4). Ambos vectores son perpendiculares a (4,2).

Tenemos a continuación que definir la recta cuyo vector director es cualquiera de los dos anteriores y pasa por el punto P(1, -2). Para el vector (2,-4), la ecuación continua quedaría:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} \rightarrow \frac{x-1}{2} = -\frac{y+2}{4}$$

Pasando ambas rectas a su forma implícita, solucionamos el sistema que forman dichas rectas y obtendremos el punto intersección de ambas:

$$\frac{x-1}{2} = -\frac{y+2}{4} \rightarrow -4x + 4 = 2y + 4 \rightarrow y = -2x$$

$$\vec{r}(k) = \{(x, y) = (-2, 2) + k(\overrightarrow{4, 2})\} \rightarrow \frac{x+2}{4} = \frac{y-2}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 3$$

$$\begin{cases} y = -2x \\ y = \frac{1}{2}x + 3 \end{cases} \rightarrow -2x = \frac{1}{2}x + 3 \rightarrow -2x - \frac{1}{2}x = 3 \rightarrow -\frac{5}{2}x = 3 \rightarrow x = -\frac{6}{5}$$

$$y = -2x = -2\left(-\frac{6}{5}\right) = \frac{12}{5}$$

Por lo tanto, el punto de intersección entre las dos rectas es:

$$I\left(-\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

Por último, para obtener el punto simétrico uso la formula del punto medio, teniendo en cuenta que el punto medio es el punto intersección:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$\left(-\frac{6}{5}, \frac{12}{5} \right) = \left(\frac{1 + s_x}{2}, \frac{-2 + s_y}{2} \right)$$

Despejamos las coordenadas del punto S simétrico:

$$\frac{1 + s_x}{2} = -\frac{6}{5} \rightarrow s_x = -\frac{12}{5} - 1 = -\frac{17}{5}$$

$$\frac{-2 + s_y}{2} = \frac{12}{5} \rightarrow s_y = \frac{24}{5} + 2 = \frac{34}{5}$$

Nos queda el punto simétrico $S \left(-\frac{17}{5}, \frac{34}{5} \right)$.

Academia



Pyro

Ejercicio 15

Un mapa cuya escala es 1:20.000 lleva incorporado un sistema de referencia euclídeo cuyas unidades vienen en cm. En el punto $(-2,1)$ se encuentra situado un pozo y en el punto $(6,7)$ se encuentra situada una fábrica. Queremos construir una tubería de cemento que, en línea recta, lleve el agua desde el pozo a la fábrica. Calcula:

- La longitud de la tubería en el mapa y en la realidad.
- La ecuación de la recta que sustenta la tubería.

Examen de Acceso a Grado Superior de Valencia de 2012.

a)

En el mapa:

$$\begin{aligned}\text{Distancia} &= \sqrt{(6 - (-2))^2 + (7 - 1)^2} = \sqrt{(6 + 2)^2 + (7 - 1)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}\end{aligned}$$

En la realidad:

$$10 \text{ cm} \times 20000 = 200000 \text{ cm} = 2 \text{ km}$$

b)

La pendiente m es:

$$m = \frac{7 - 1}{6 - (-2)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Usamos la forma punto-pendiente con el punto $(-2, 1)$:

$$y - 1 = \frac{3}{4}(x + 2) \Rightarrow y - 1 = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2} + 1 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$$

La ecuación de la recta es $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$

Ejercicio 16

En un mapa, que incorpora unos ejes de coordenadas perpendiculares con las unidades en centímetros, figuran dos poblaciones A y B, situadas respectivamente en los puntos (3, 0) y (-1, -3).

- Calcula la distancia en el plano entre las dos poblaciones
- Calcula la distancia real en km si la escala es 1:50.000
- Si pudiéramos construir una carretera totalmente recta entre las dos poblaciones, ¿cuál sería la ecuación que cumpliría en el plano dicha carretera?

Examen de Acceso a Grado Superior de Valencia de 2013.

1. Distancia en el plano:

Utilizamos la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Para los puntos (3, 0) y (-1, -3):

$$d = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (0 - (-3))^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

2. Distancia real:

Escala de 1 : 50000:

$$5 \text{ cm} \cdot 50000 = 250000 \text{ cm} = 2,5 \text{ km}$$

3. Ecuación de la carretera:

La pendiente m es:

$$m = \frac{-3 - 0}{-1 - 3} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

Entonces, usando la forma punto-pendiente:

$$y = \frac{3}{4}(x - 3)$$

Ejercicio 17

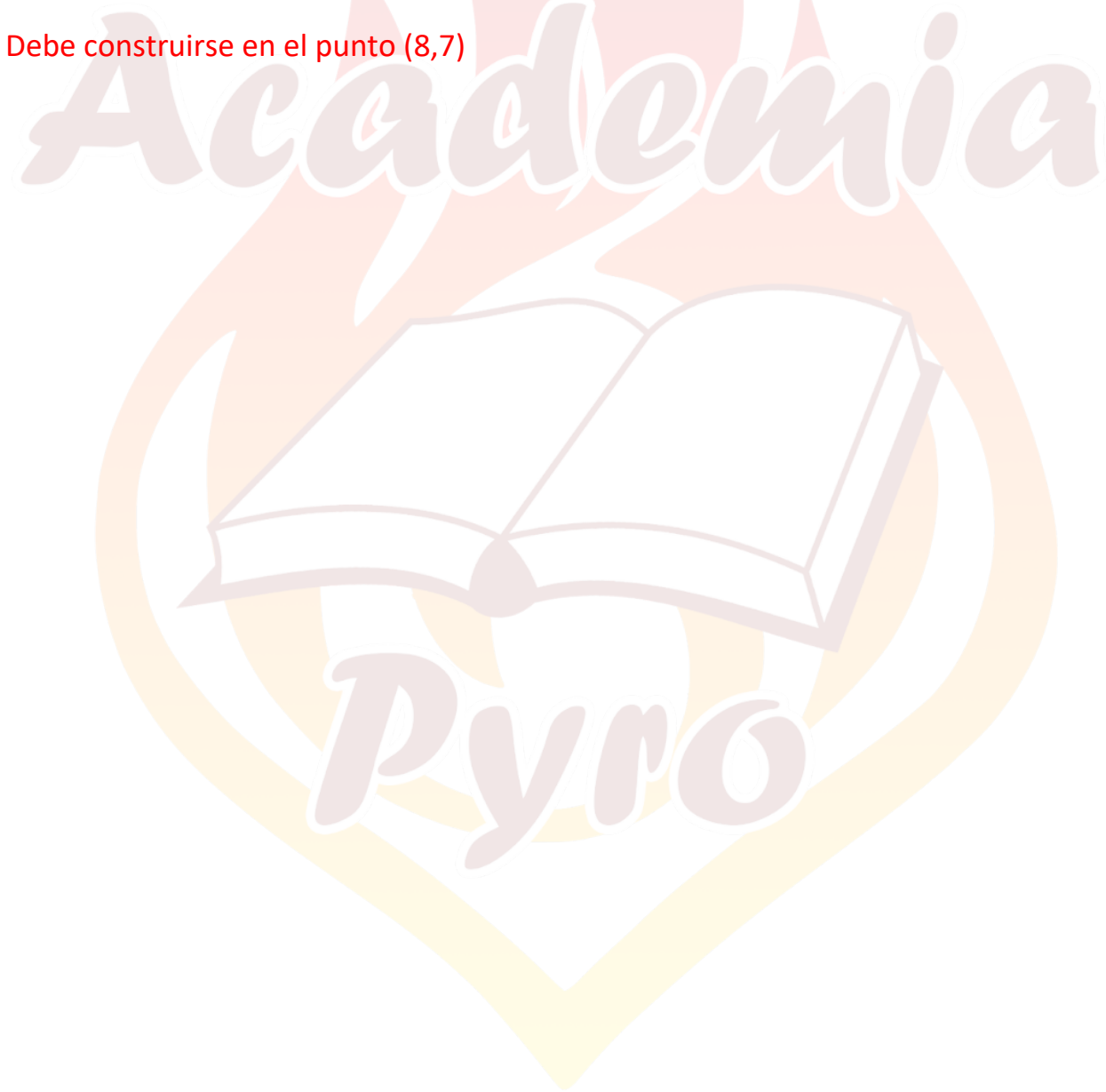
Durante un operativo de rescate, los bomberos necesitan construir un muelle de acceso en un canal para facilitar la evacuación de personas afectadas por una inundación. Dos parques de bomberos, de coordenadas A(2,6) y B(12,2), están ubicados en lados opuestos del canal. Para optimizar la respuesta de emergencia, el muelle debe construirse en un punto equidistante a ambas estaciones.

El canal está representado en el plano cartesiano por la recta:

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

¿En qué punto exacto deben construir el muelle para que esté a la misma distancia de ambas estaciones de bomberos?

Debe construirse en el punto (8,7)



Ejercicio 18

En una ciudad, un equipo de bomberos debe llegar lo más rápido posible a un incendio en un edificio ubicado en el punto $P(8, 12)$ de un plano cartesiano donde cada unidad representa 100 metros. La estación de bomberos se encuentra en el punto $E(2, 4)$.

Condiciones del problema:

- Caminos disponibles:** La ciudad tiene dos avenidas principales que permiten el acceso al incendio:
 - Avenida 1: Pasa por la estación de bomberos y tiene una pendiente de $3/4$.
 - Avenida 2: Es perpendicular a la Avenida 1 y pasa por el punto $P(8, 12)$.
- Distancia más corta:** Un equipo de bomberos puede tomar un atajo en línea recta desde la estación hasta el incendio, pero deben asegurarse de calcular correctamente la ecuación de su trayectoria directa.
- Tiempo de respuesta:**
 - Si viajan por la **Avenida 1**, se desplazan a **60 km/h**.
 - Si viajan por la **Avenida 2**, lo hacen a **80 km/h**.
 - Si toman el **atajo en línea recta**, su velocidad es de **50 km/h** debido a obstáculos en el camino.

Preguntas:

- Encuentra la ecuación de la Avenida 1 que pasa por la estación de bomberos con la pendiente dada.
- Encuentra la ecuación de la Avenida 2, perpendicular a la Avenida 1 y que pase por el incendio.
- Encuentra la ecuación de la recta del atajo que conecta directamente la estación con el incendio.
- Calcula las distancias recorridas en cada ruta:
 - Por la Avenida 1 y luego por la Avenida 2 hasta el incendio.
 - Por el atajo en línea recta.

Calcula el tiempo de llegada en cada caso y determina cuál es la mejor estrategia para minimizar el tiempo de respuesta.

La ruta por avenidas es la más rápida (70,2 s vs. 72 s).

Ejercicio 19

Escribe la ecuación de la circunferencia (forma ordinaria y forma general) de centro (3, 4) y radio 2.

La ecuación en forma ordinaria es:

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 2^2$$

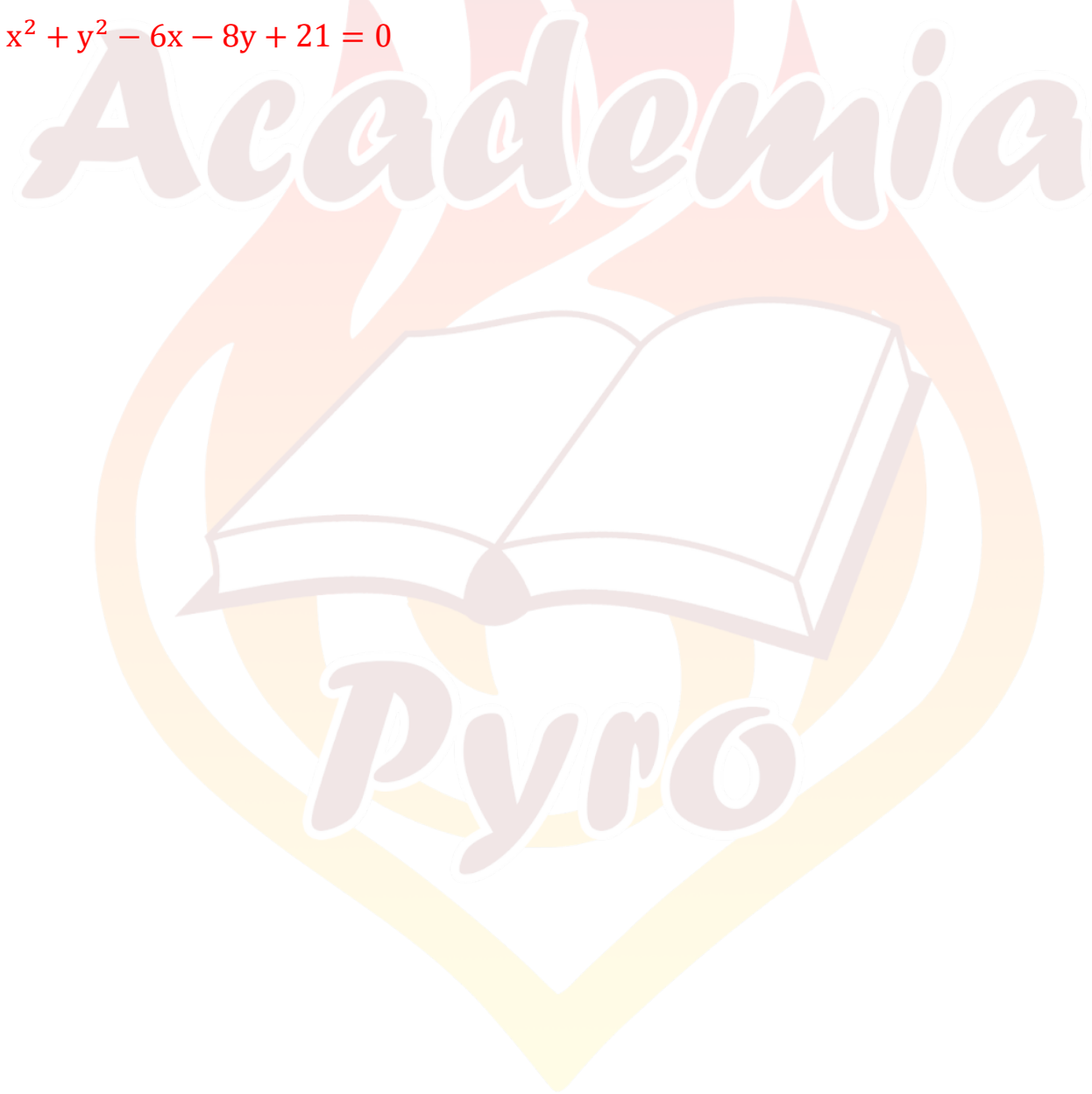
$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$$

Forma general:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$$



Ejercicio 20

Dadas las siguientes ecuaciones de circunferencia, determina el centro y el radio.

a) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 3x + y - 10 = 0$

c) $4x^2 + 4y^2 - 4x + 12y - 6 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 8y - 9 = 0$

a)

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$$

Centro: $(2, 3)$

Radio: 1

b)

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 12,5$$

Centro: $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Radio: $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

c)

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 4$$

Centro: $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Radio: 2

d)

$$x^2 + (y + 4)^2 = 25$$

Centro: $(0, -4)$

Radio: 5

Ejercicio 21

Halla la ecuación de la circunferencia concéntrica a $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$, y que tenga radio 7.

Primero, hallamos el centro de la circunferencia dada completando cuadrados:

$$x^2 - 6x + y^2 + 2y = 6$$

Agrupamos los términos de x y y:

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 2y + 1) = 6 + 9 + 1$$

Añadimos y restamos 9 y 1:

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$$

La circunferencia tiene centro (3, -1) y radio $\sqrt{16} = 4$.

Queremos una circunferencia concéntrica con radio 7:

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 7^2$$

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 49$$

Ejercicio 22

Halla la ecuación de la circunferencia concéntrica a $2x^2 + 2y^2 - 8x + 12y - 18 = 0$, y que pase por el punto $(-1, 5)$.

Primero, obtenemos el centro de la circunferencia dada. Simplificamos dividiendo todo entre 2:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 9 = 0$$

Reescribimos la ecuación en la forma estándar completando cuadrados.

Agrupamos los términos de x e y:

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y - 9 = 0$$

Completamos el cuadrado para x e y:

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 6y + 9 - 9 - 9 = 0$$

$$(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 - 9 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 22$$

El centro de la circunferencia es $(2, -3)$.

Como las circunferencias son concéntricas, comparten el mismo centro. A continuación, para determinar el radio de la circunferencia buscada uso la fórmula de la distancia punto-punto para desde el centro hasta el punto $(-1, 5)$ dado en el enunciado.

$$r = \sqrt{(c_1 - p_1)^2 + (c_2 - p_2)^2} = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-3 - 5)^2} = \sqrt{73}$$

La ecuación de la circunferencia con centro en $(2, -3)$ y radio $\sqrt{73}$ es:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 73$$

Ejercicio 23

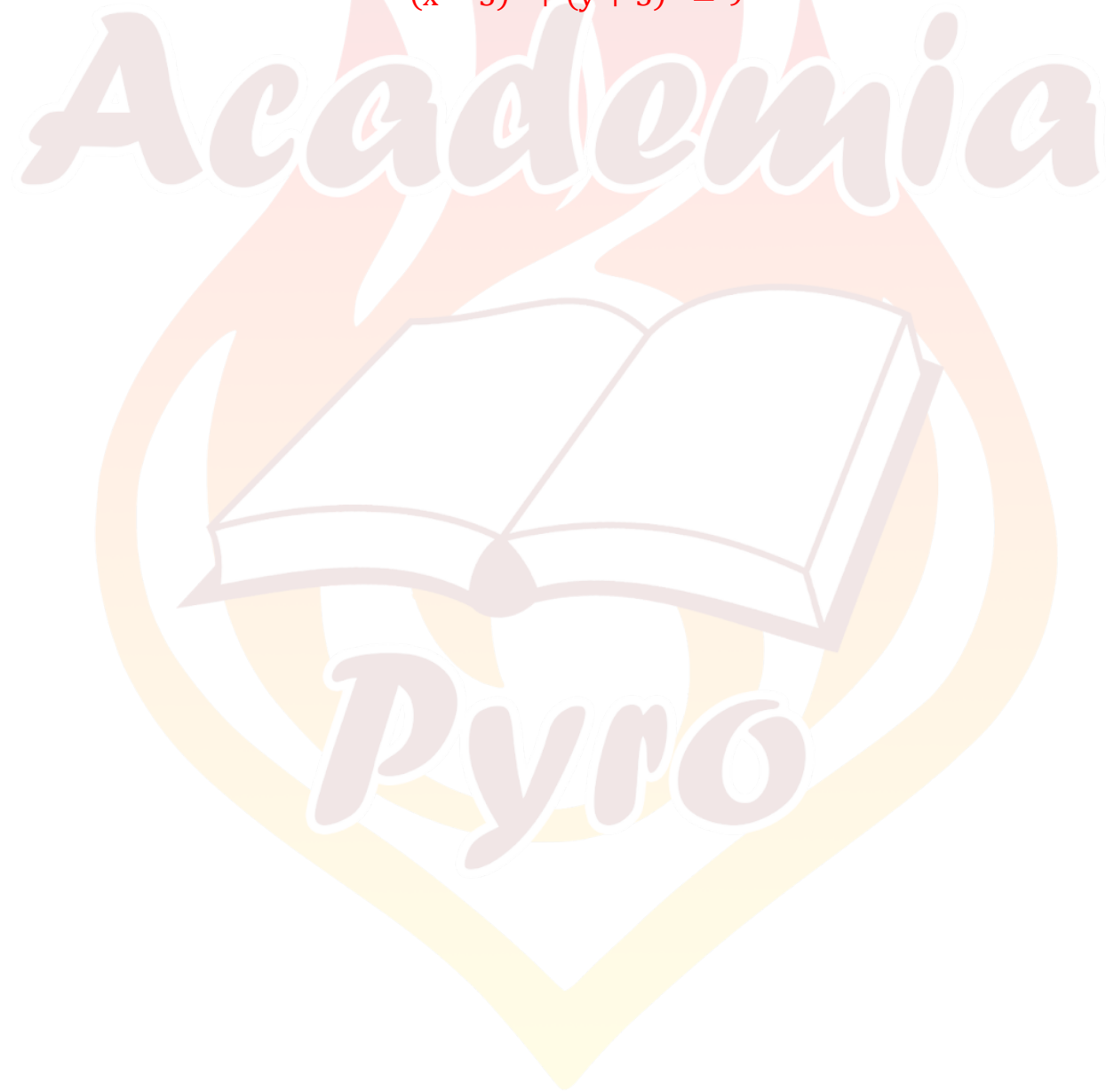
Halla la ecuación de la circunferencia con centro $(3, -5)$ y que es tangente al eje de ordenadas.

Dado que la circunferencia es tangente al eje de ordenadas (eje y), la distancia del centro de la circunferencia al eje de ordenadas será el radio de la circunferencia. La distancia del punto $(3, -5)$ al eje y es simplemente la coordenada x del centro.

$$r = 3$$

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia con centro en $(3, -5)$ y que es tangente al eje de ordenadas es:

$$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 9$$



Ejercicio 24

Escribe la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto de intersección de la recta $x + 3y = 0$ con $x + y + 1 = 0$, y que tenga radio 6.

Para obtener el punto intersección de las dos rectas resolvemos el sistema de ecuaciones formado por las dos rectas:

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\frac{x}{3} \\ y = -x - 1 \end{cases} \rightarrow -\frac{x}{3} = -x - 1 \rightarrow \frac{x}{3} = x + 1 \rightarrow x = 3x + 3 \rightarrow$$
$$\rightarrow -2x = 3 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$x + y + 1 = 0 \rightarrow -\frac{3}{2} + y + 1 = 0 \rightarrow y = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

De resolver este sistema nos queda el punto de intersección el centro de la circunferencia, que es $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Ahora, teniendo el centro y el radio dado por el enunciado escribimos la ecuación canónica de la circunferencia.

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 36$$

Ejercicio 25

Hallar el área del círculo cuya ecuación es $9x^2 + 9y^2 + 72x - 12y + 103 = 0$.

Dividimos toda la ecuación por 9 para simplificarla:

$$x^2 + y^2 + 8x - \frac{4}{3}y + \frac{103}{9} = 0$$

A continuación, reescribimos la ecuación completando cuadrados:

$$x^2 + 8x + 16 - 16 + y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} - \frac{4}{9} + \frac{103}{9} = 0$$

$$(x - 4)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9} + \frac{103}{9} + 16$$

$$(x - 4)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = 5$$

$$(x - 4)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = (\sqrt{5})^2$$

Ahora determinamos el área del círculo con el radio obtenido:

$$\text{Área}_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2$$

$$\text{Área}_{\text{círculo}} = \pi \cdot (\sqrt{5})^2 = 5\pi$$

Ejercicio 26

Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos P (2 -1), Q (3, 0) y R (0, -2).

Para resolver este problema obtenemos dos rectas con los tres puntos dados, por ejemplo, la recta r que contiene al segmento PQ y la recta s que contiene al segmento QR. Después, obtenemos las rectas perpendiculares a dichas segmento que pasan por sus puntos medios. La intersección de estas dos rectas perpendiculares dará el centro de la circunferencia. Una vez obtenido el centro, el radio de la circunferencia lo sacamos usando la fórmula de la distancia entre dos puntos, en este caso entre el centro y cualquiera de los tres puntos dados.

La recta que une los puntos P y Q es: $y = x - 3$

El punto medio del segmento $\overline{PQ}$ es: $P_{\text{medioPQ}} = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

La recta que pasa por ese punto medio y es perpendicular a la anterior es: $y = -x + 2$

Haciendo lo mismo con los puntos Q y R obtenemos la recta: $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$

Intersectamos las dos rectas y tenemos el centro: $C\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

Para calcular el radio usamos la formula de distancia entre dos puntos siendo esos dos puntos el centro y cualquiera de los tres que da el enunciado. Por ejemplo, entre

$C\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ y P(2 -1):

$$d(C, P) = \sqrt{(c_x - p_x)^2 + (c_y - p_y)^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{7}{2} + 1\right)^2} = \sqrt{\frac{65}{2}}$$

Nos queda por tanto la ecuación de la circunferencia siguiente:

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{65}{2}$$

Ejercicio 27

Escribe la ecuación de la circunferencia si uno de sus diámetros está delimitado por los puntos A (-4, 5) y B (-2, 1).

El centro de la circunferencia es el punto medio del diámetro AB. El punto medio de dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se calcula como:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Para los puntos A(-4, 5) y B(-2, 1):

$$\left(\frac{-4 + (-2)}{2}, \frac{5 + 1}{2} \right) = \left(\frac{-6}{2}, \frac{6}{2} \right) = (-3, 3)$$

El radio de la circunferencia es la distancia desde el centro al punto A o B. Usamos la fórmula de la distancia entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) :

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Calculamos la distancia entre el centro (-3, 3) y el punto A(-4, 5):

$$r = \sqrt{(-4 + 3)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 5$$

Ejercicio 28

- a) Indicar cuál es el lugar geométrico de los puntos del plano que distan 5 unidades del punto A (2, 3).
- b) Calcular su ecuación.
- c) Determine cuáles de los siguientes puntos pertenecen al lugar geométrico: D(6,6), E(4,7).
- d) Determine la posición relativa del lugar geométrico y la recta $3x - 4y + 4 = 0$.

Examen de Acceso a Grado Superior de Madrid 2011.

a)

El lugar geométrico de los puntos del plano que distan 5 unidades del punto A(2,3) es una **circunferencia con centro en A(2, 3) y radio 5.**

b)

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

c)

Para determinar si un punto pertenece a la circunferencia, sustituimos sus coordenadas en la ecuación de la circunferencia y verificamos si se cumple la igualdad.

Sustituyendo D(6, 6) en la ecuación de la circunferencia:

$$(6 - 2)^2 + (6 - 3)^2 = 16 + 9 = 25$$

Por lo que el punto D(6, 6) pertenece a la circunferencia.

Sustituyendo E(4, 7) en la ecuación de la circunferencia:

$$(4 - 2)^2 + (7 - 3)^2 = 4 + 16 = 20 \neq 25$$

Por lo que el punto E(4, 7) no pertenece a la circunferencia.

d)

Para determinar la posición relativa de la circunferencia y la recta, evaluamos la distancia del centro de la circunferencia a la recta y comparamos esta distancia con el radio de la circunferencia.

La distancia d de un punto (x_1, y_1) a una recta $Ax + By + C = 0$ está dada por:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Sustituimos $(x_1, y_1) = (2, 3)$, $A = 3$, $B = -4$, $C = 4$:

$$d = \frac{|4 \cdot 2 + (-4) \cdot 3 + 4|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{2}{5}$$

La distancia del centro de la circunferencia a la recta es $\frac{2}{5}$, que es menor que el radio de la circunferencia que en este caso es de 5, por lo que dicha recta es secante a la circunferencia, es decir, la interseca en dos puntos.

Academia



Pyro