SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS

TEMA 5

INECUACIONES. INECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO. SISTEMAS DE INECUACIONES CON UNA Y DOS INCÓGNITAS.

“Las personas que tienen un decidido talento matemático constituyen, por así decirlo, una clase favorecida. Tienen la misma relación con el resto de la humanidad que quienes tienen una formación académica con quienes no la tienen.”

August Ferdinand Möbius (1790 - 1868)

Ejercicio 1

Resolver las siguientes inecuaciones lineales y representa el resultado en la recta real:

a) $\frac{6x}{5} - \frac{1}{3} \leq \frac{2}{3} - 1$

$(-\infty, 0]$

b) $\frac{2}{3}\left[x - \left(1 - \frac{x-2}{3}\right)\right] + 1 \leq x$

$[-1, \infty)$

c) $\frac{5x}{7} - \frac{13}{21} + \frac{x}{15} < \frac{9}{25} - \frac{2x}{35}$

$\left(-\infty, \frac{257}{220}\right)$

d) $\frac{x-10}{-2} \leq 1 + \frac{1-(2x+3)}{-3}$

$\left[\frac{20}{7}, \infty\right)$

e) $2 - \frac{x-3}{2} \leq 1 + \frac{3-x}{3}$

$[9, \infty)$

f) $-\frac{2(2+x)}{2} \leq \frac{-x+3}{3}$

$\left[\frac{-9}{2}, \infty\right)$

Ejercicio 2

Resolver las siguientes inecuaciones de segundo grado y polinómicas y representa el resultado en la recta real:

a) $\mathbf{(x+1)x^2(x-3) > 0}$

$(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$

b) $\mathbf{2(x+3) + 3(x-1) \leq 2(x+2)}$

$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$

c) $\mathbf{x(x+3) - 2x > 4 + 4x}$

$(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$

d) $\mathbf{(x+1) \cdot (x+1) < 0}$

No tiene solución.

e) $\mathbf{\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{11x+2}{15} < \frac{x^2-1}{3}}$

$(-\infty, -12)$

f) $\mathbf{x^3 - 11x^2 + 10x \leq 0}$

$(-\infty, 0] \cup [1,10]$

Ejercicio 3

Resolver las siguientes inecuaciones racionales y representa el resultado en la recta real:

a) $\frac{4-x^2}{(x-3)^2} > 0$

$-2 < x < 2$

b) $\frac{x^2-x-2}{2x^2-x-1} \geq 0$

$(-\infty,-1] \cup \left(\frac{-1}{2},1\right) \cup [2,\infty)$

c) $\frac{x^4-3x^3+2x^2}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4} \leq 0$

$(1,2)$

d) $\frac{12+x^2-7x}{(x+2)^3-3x^2-20-16x} \geq 0$

$(-3,-2) \cup (2,3] \cup [4,\infty)$

e) $\frac{x^4-13x^2+36}{x^2-2x+1} < 0$

$(-\infty,-3] \cup [-2,1) \cup (1,2] \cup [3,\infty)$

f) $\frac{x-3}{x-2} < 2$

$(-\infty,2) \cup (7,\infty)$

Ejercicio 4

Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita y representa el resultado en la recta real:

a) $\begin{cases} \mathbf{4x - 3 < 1} \\ \mathbf{x + 6 > 2} \end{cases}$

$(-4{,}1)$

b) $\begin{cases} \mathbf{5 - x < 12} \\ \mathbf{16 - 2x < 3x - 3} \end{cases}$

$(17, \infty)$

c) $\begin{cases} \frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{3}} - \frac{\mathbf{x+3}}{\mathbf{2}} \le \mathbf{x} \\ \frac{\mathbf{4x-2}}{\mathbf{4}} - \frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{3}} \ge x \end{cases}$

$\left[-\frac{11}{7}, \frac{-1}{2}\right]$

d) $\begin{cases} \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{5}} > \mathbf{8} \\ \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{4x}}{\mathbf{9}} > \mathbf{5} \end{cases}$

$(90, \infty)$

e) $\begin{cases} \mathbf{4(x - 1)} + \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}} < \mathbf{x} - \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}} \\ \frac{\mathbf{2x+1}}{\mathbf{3}} - \frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{6}} \le \mathbf{2} \\ \mathbf{2x - 3 < 3x - 2} \end{cases}$

$\left(-1, \frac{14}{21}\right)$

Ejercicio 5

Dos estaciones de bomberos ofrecen distintos incentivos salariales a sus brigadistas. En la primera estación, los bomberos reciben un sueldo base de 1.000 euros mensuales, más un bono de 200 euros por cada incendio sofocado. En la segunda estación, el sueldo fijo es de 800 euros, pero el bono por cada incendio sofocado es de 250 euros. Si un bombero quiere elegir la mejor opción económica, ¿cuál de las dos estaciones le convendría más según la cantidad de incendios atendidos?

Si un bombero atiende menos de 4 incendios, la mejor opción es la Estación 1, mientras que si cree que podrá atender más de 4 incendios, la mejor opción es la Estación 2.

Ejercicio 6

Un camión de bomberos se dirige a una emergencia con una velocidad que varía entre 60 km/h y 90 km/h, dependiendo del tráfico y las condiciones del camino. ¿A qué distancia del cuartel de bomberos podría encontrarse después de 15 minutos de recorrido?

Después de 15 minutos, el camión de bomberos podría encontrarse entre 15 km y 22.5 km de distancia del cuartel.

Ejercicio 7

1. Expresa mediante una inecuación el área de un cuadrado sabiendo que su perímetro es mayor que el de un rectángulo de lados 3 y 7 cm.

   Si el lado del cuadrado es x, su área será $x^2 > 25$

2. Si el perímetro de un rombo no supera los 60 metros, ¿qué podemos decir de la longitud de sus lados?

   Que es inferior a 15 metros.

3. El área de un cuadrado es menor o igual que 36 m2. Calcula cuánto puede medir el lado.

   $0 < x \leq 6$

Ejercicio 8

Un bombero revisa el fondo común que tiene en su parque para comprar parte de la comida del mes. Si tuviera el triple de lo que hay actualmente en la caja, le faltarían menos de 2 euros para alcanzar 20 euros. Sin embargo, si tuviera el cuádruple, todavía no llegaría a 27 euros. ¿Cuánto dinero puede haber en la caja del equipo de bomberos?

El fondo común del parque tiene más de 6 euros y menos de 6.75 euros.

Ejercicio 9

1. El doble de la suma de un número más tres unidades es más grande que el triple de este número más seis unidades. ¿De qué números se trata?

   Cualquier número negativo cumple la condición.

2. El producto de un número entero por otro, dos unidades mayor, es menor que 8. ¿Cuál puede ser ese número?

   El número entero pertenece al intervalo (-2,4).

Ejercicio 10

En un grupo de preparación para oposiciones hay un total de 40 aspirantes. Después de realizar un examen, se observa que el triple de aprobados es mayor que el doble de suspensos. ¿Cuál es el menor número de opositores aprobados posible?

El menor número de aprobados posible es 17, ya que el número de alumnos debe ser un número entero.

Ejercicio 11

En un rectángulo, la altura mide 12 cm y la base es desconocida. Si se sabe que su área está comprendida entre 300 y 600 cm^2, pudiendo ser incluso alguno de estos dos valores, ¿qué puede decirse de la base?

La base del rectángulo debe estar en el intervalo: $25 \leq b \leq 50$

Ejercicio 12

1. Encuentra todos los números para los que el producto de ellos por su consecutivo es un entero negativo.

   Los números que cumplen esta condición son todos los números entre -1 y 0, sin incluir -1 ni 0.

2. ¿Qué números cumplen que su cuadrado menos su mitad da como resultado un número negativo?

   Los números que cumplen esta condición son todos los valores entre 0 y 1/2 , sin incluir 0 ni ½.

3. ¿Para qué números la diferencia de su cuadrado y su cuádruple es positiva?

   Los números que cumplen esta condición son todos los menores que 0 y los mayores que 4.

Ejercicio 13

Un parque de bomberos organiza la venta de calendarios solidarios para recaudar fondos destinados a una asociación local que ayuda a personas con discapacidad. Cada calendario se vende por 12 euros y los gastos de impresión y distribución ascienden a 2.500 euros. ¿Cuántos calendarios necesitan vender como mínimo si quieren obtener un beneficio de 20.000 euros o más para donar a la citada asociación?

El mínimo número de calendarios que deben vender para lograr el objetivo es 1.875 calendarios.

Ejercicio 14

Una compañía eléctrica ofrece tres tarifas que tienen una parte fija y una parte proporcional al consumo:

- Tarifa A: 6,70 euros cantidad fija más 0,18 euros por kilovatio de consumo.
- Tarifa B: 9,60 euros cantidad fija más 0,13 euros por kilovatio de consumo.
- Tarifa C: 14 euros cantidad fija más 0,09 euros por kilovatio de consumo.

Se pide:

a) ¿A partir de qué cantidad de consumo la tarifa B es mejor que la A?
b) ¿A partir de que cantidad de consumo la tarifa C es mejor que la A?
c) ¿A partir de que cantidad de consumo la tarifa C es mejor que todas?

Oposición CEIS de la CARM, 2021

Llamamos **x** al número de kilovatios de consumo e **y** a la cantidad facturada en euros.

Planteamos las ecuaciones de las distintas tarifas:

1. "Tarifa A: 6,70 euros cantidad fija más 0,18 euros por kilovatio de consumo" $\mathbf{y_A = 6,70 + 0,18x}$
2. "Tarifa B: 9,60 euros cantidad fija más 0,13 euros por kilovatio de consumo" $\mathbf{y_B = 9,60 + 0,13x}$
3. "Tarifa C: 14 euros cantidad fija más 0,09 euros por kilovatio de consumo" $\mathbf{y_C = 14 + 0,09x}$

Como el problema nos pide comparar estas tarifas para obtener un valor de kilovatios consumidos (la **x**) a partir del cual una u otra tarifa es mejor, planteamos las siguientes inecuaciones:

a) ¿A partir de qué cantidad de consumo la tarifa B es mejor que la A?

Para que la tarifa B sea mejor que la tarifa A el precio que pagamos por ella ha de ser menor. Por ello, planteamos la inecuación con las y de cada tarifa. De ahí despejaremos en la inecuación y obtendremos una condición para el valor del consumo de kilovatios.

$$y_B < y_A \rightarrow 9{,}60 + 0{,}13x < 6{,}70 + 0{,}18x \rightarrow 2{,}90 < 0{,}05x \rightarrow x > \frac{2{,}90}{0{,}05} \rightarrow \mathbf{x > 58\ kW}$$

Luego la tarifa B será mejor que la tarifa A a partir de 58 kW de consumo.

b) ¿A partir de que cantidad de consumo la tarifa C es mejor que la A?

Procedemos como en el apartado anterior. Para que la tarifa C sea mejor que la tarifa A el precio que pagamos por ella ha de ser menor. Por ello, planteamos la inecuación con las y de cada tarifa. De ahí despejaremos en la inecuación y obtendremos una condición para el valor del consumo de kilovatios.

$$y_C < y_A \rightarrow 14 + 0{,}09x < 6{,}70 + 0{,}18x \rightarrow 7{,}30 < 0{,}09x \rightarrow x > \frac{7{,}30}{0{,}09} \rightarrow \mathbf{x > 81{,}11\ kW}$$

Luego la tarifa C será mejor que la tarifa A a partir de 81,11 kW de consumo.

c) ¿A partir de que cantidad de consumo la tarifa C es mejor que todas?

En este caso tendría que comparar la tarifa C con las otras dos. La comparación con la tarifa A ya está hecha en el apartado anterior, luego solo nos resta compararla con a tarifa B.

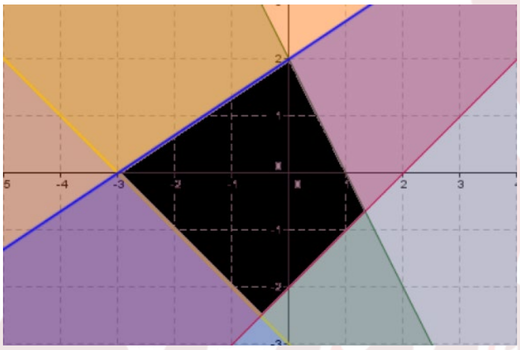
$$y_C < y_B \rightarrow 14 + 0{,}09x < 9{,}60 + 0{,}13x \rightarrow 4{,}40 < 0{,}04x \rightarrow x > \frac{4{,}40}{0{,}04} \rightarrow \mathbf{x > 110\ kW}$$

Apreciando que el valor de 110 kW es mayor que el de 81,11 kW de la comparativa anterior, concluimos que **a partir de 110 kW la tarifa C es mejor que todas.**

Ejercicio 15

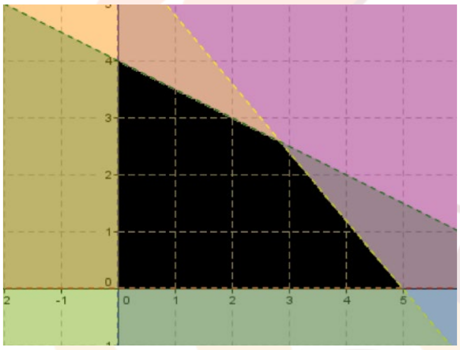
Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas y representa gráficamente el resultado:

a) $\begin{cases} \mathbf{2x + y \leq 2} \\ \mathbf{x + y > -3} \\ \mathbf{x - y \leq 2} \\ \mathbf{2x - 3y > 6} \end{cases}$



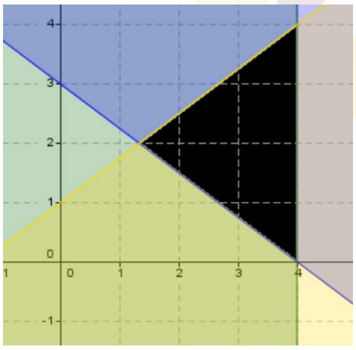
$$\text{Vértices} \begin{cases} A\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right) \text{ Es solucion} \\ B(0,2) \text{ No es solución} \\ C(-3,0) \text{ No es solución} \\ D\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right) \text{ No es solución} \end{cases}$$

b) $\begin{cases} \mathbf{x > 0} \\ \mathbf{y > 0} \\ \mathbf{6x + 5y < 30} \\ \mathbf{x + 2y < 8} \end{cases}$



$$\text{Vértices} \begin{cases} A(0,0) \text{ No es solución} \\ B(0,4) \text{ No es solución} \\ C\left(\frac{20}{7}, \frac{18}{7}\right) \text{ No es solución} \\ D(5,0) \text{ No es solucion} \end{cases}$$

c) $\begin{cases} \mathbf{3x + 4y \geq 12} \\ \mathbf{-3x + 4y \leq 4} \\ \mathbf{x - 4 \leq 0} \end{cases}$



$$\text{Vértices} \begin{cases} A(0,3) \text{ Es solución} \\ B\left(\frac{0,1}{2}\right) \text{ Es solución} \\ C(1,0) \text{ Es solución} \end{cases}$$

Ejercicio 16

Repartimos varios exámenes entre dos clases de un colegio. El triple de exámenes de la clase de 1ºA más el cuádruple de exámenes de 1ºB no puede ser menor que 12, pero el cuádruple de exámenes de 1ºB menos el triple de exámenes de 1ºA no puede ser superior a 4. Suponiendo que los exámenes de la clase de 1ºA no pueden ser superior a 4. ¿Cuántos exámenes podemos repartir en cada clase?

(Escribe todas las soluciones posibles)

4 exámenes de 1ºA y 0 de 1ºB

4 exámenes de 1ºA y 1 de 1ºB

4 exámenes de 1ºA y 2 de 1ºB

4 exámenes de 1ºA y 3 de 1ºB

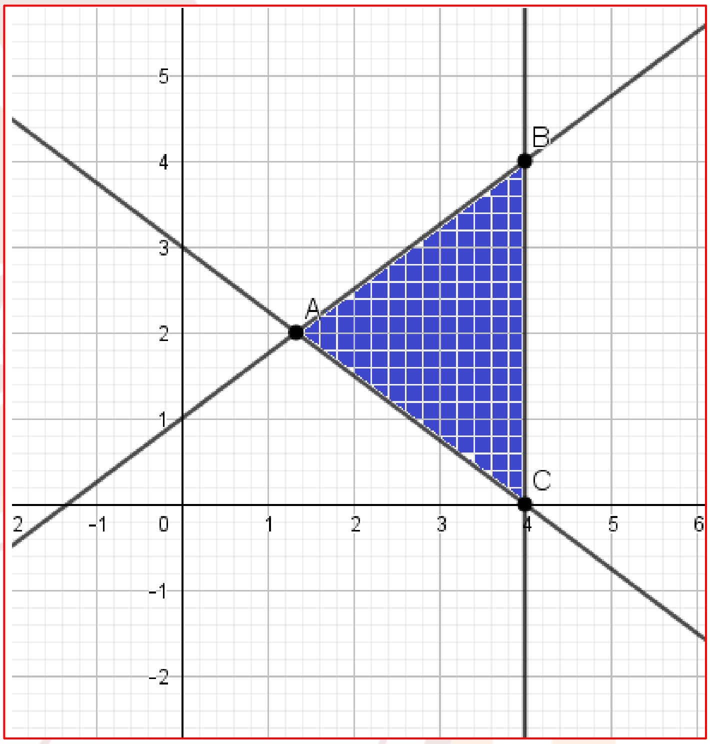
4 exámenes de 1ºA y 4 de 1ºB

3 exámenes de 1ºA y 1 de 1ºB

3 exámenes de 1ºA y 2 de 1ºB

3 exámenes de 1ºA y 3 de 1ºB

2 exámenes de 1ºA y 2 de 1ºB



Ejercicio 17

Repartimos varias bolas entre dos cajas. En la caja de la izquierda debe haber menos bolas que en la caja de la derecha, pero en esta no debe haber más del doble que en aquella. No podemos repartir más de 10 bolas. Suponiendo que debe haber alguna bola en cada caja. ¿Cuántas bolas podemos tener en cada caja?

1 bola en la caja de la izquierda y 2 bolas en la derecha.

2 bolas en la caja de la izquierda y 3 bolas en la derecha.

2 bolas en la caja de la izquierda y 4 bolas en la derecha.

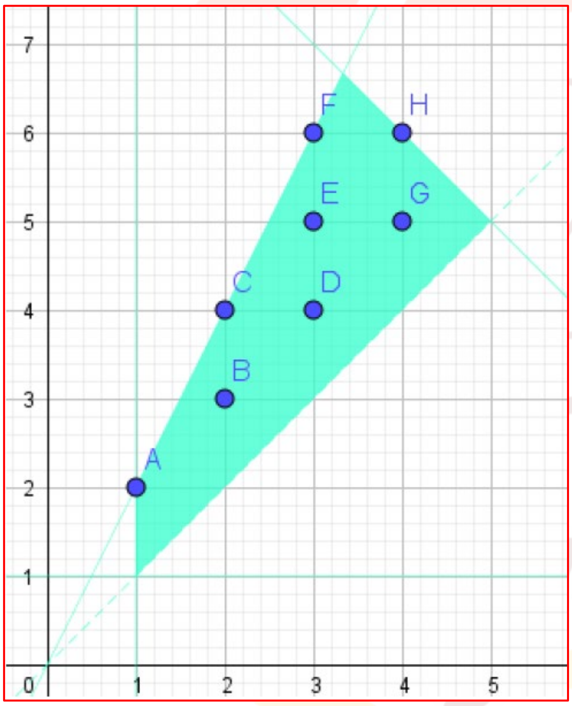
3 bolas en la caja de la izquierda y 4 bolas en la derecha.

3 bolas en la caja de la izquierda y 5 bolas en la derecha.

3 bolas en la caja de la izquierda y 6 bolas en la derecha.

4 bolas en la caja de la izquierda y 5 bolas en la derecha.

4 bolas en la caja de la izquierda y 6 bolas en la derecha.



No son soluciones los puntos (1,1) (2,2) (3,3) (4,4) y (5,5) debido a que estos puntos se encuentran encima de una recta discontinua, por lo tanto estos puntos no son solución.

Ejercicio 18

Se quieren fabricar camisetas deportivas de dos calidades, que se diferencian en la proporción de algodón y de fibra sintética que se utiliza.

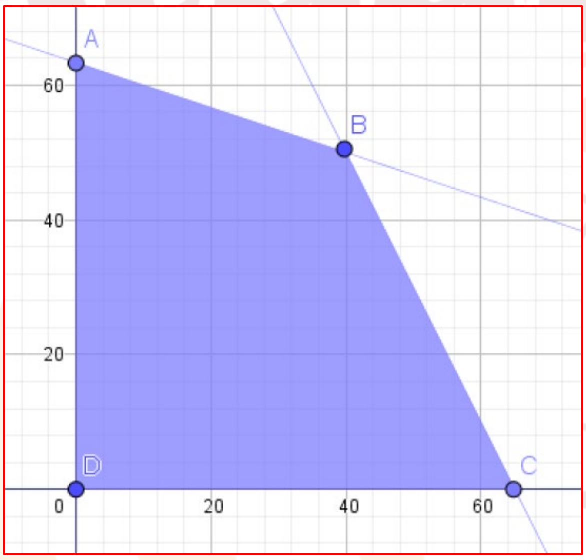
La tabla siguiente da la composición de cada tipo de camiseta:

	Unidades de algodón	Unidades de fibra sintética
Calidad extra	4	1
Calidad media	2	3

Para confeccionar todas las camisetas disponemos de unidades no superiores a 260 unidades en el caso de las de algodón y de 190 unidades en el caso de fibra sintética. Las camisetas de cada tipo no pueden ser menores de 0.

a) Determina, de forma gráfica, las diferentes posibilidades que hay de producir camisetas.
b) ¿Es posible confeccionar 50 camisetas de calidad extra y 40 de calidad media?

a)



b) No es posible ya que el punto (50,40) se encuentra fuera de la región factible.

Ejercicio 19

En una tienda de comics tienen dos estanterías con dos tipos diferentes de comics. En una están las novedades de la semana y en la otra están los comics en oferta. La empresa quiere aumentar sus ventas y lanza la siguiente oferta: El precio de las novedades será de 30 euros y el de las ofertas será de 15 euros cada uno si el cliente cumple con lo siguiente.

- Se deben comprar al menos 8 comics.
- De la sección de novedades se debe comprar por lo menos una unidad más que las de oferta.

Pedro quiere aprovechar esta oferta, pero se da cuenta que cuenta con 240 euros. Calcula todas las posibilidades que posee de compra.

Llamamos **x** al número de comics de novedades e **y** al número de comics de oferta.

Planteamos las inecuaciones:

1. "Se deben comprar al menos 8 comics" → $\mathbf{x + y \geq 8}$
2. "De la sección de novedades se debe comprar por lo menos una unidad más que las de oferta." → $\mathbf{x \geq y + 1}$
3. "Cuenta con 240 euros y El precio de las novedades será de 30 euros y el de las ofertas será de 15 euros" → $\mathbf{30x + 15y \leq 240}$
4. Añadimos también $\mathbf{x \geq 0}$ e $\mathbf{y \geq 0}$ debido a que el número de comics no puede ser negativo.

Las restricciones son: $\begin{cases} x + y \geq 8 \\ x \geq y + 1 \\ 30x + 15y \leq 240 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Como tenemos varias inecuaciones lineales con dos incógnitas planteamos la solución gráficamente. Para ello, represento las rectas de cada una de las ecuaciones asociadas a las inecuaciones dadas y luego discrimino el área solución o región factible de cada una. Obteniendo posteriormente, si existe, la región factible común a todas ellas.

Como ejemplo representaremos la inecuación $x + y \geq 8$:

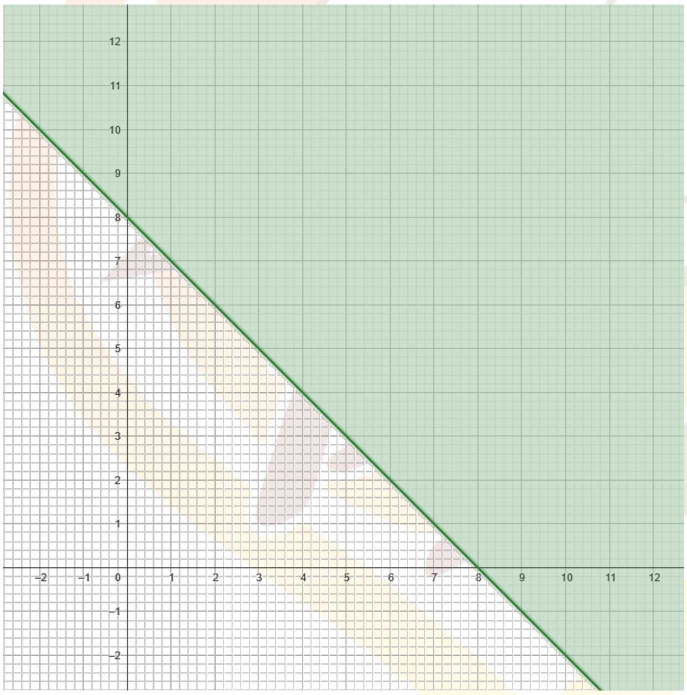
1. Ecuación de la recta asociada: $\mathbf{r_1 \equiv x + y \geq 8}$
2. Para representar esta recta necesitamos 2 puntos los cuales se obtienen dando valores a la x o a la y, forzando así la otra coordenada del punto. Así, se puede obtener por ejemplo:
   a. Con $\mathbf{x = 0 \rightarrow 0 + y = 8 \rightarrow y = 8 \rightarrow P_1(0, 8)}$
   b. Con $\boldsymbol{y} \mathbf{= 0 \rightarrow x + 0 = 8 \rightarrow x = 8 \rightarrow P_2(8, 0)}$

3. Dibujamos la recta:

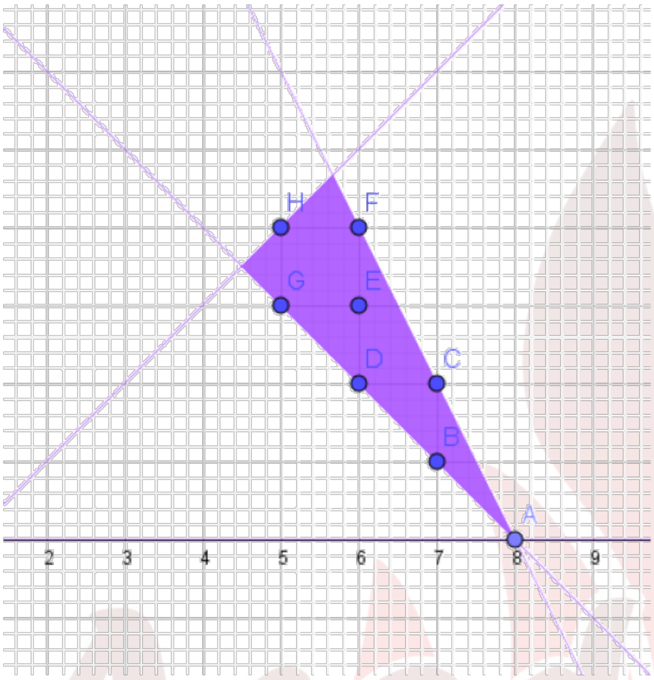
4. Para identificar el área solución de la inecuación evaluamos dicha inecuación en cualquier punto del plano cartesiano a un lado u otro de la recta representada comprobando si se cumple la desigualdad de la inecuación en el punto elegido. En este caso, si evaluamos en el origen, por ejemplo, obtenemos:

   $\mathbf{x+y \geq 8 \rightarrow 0+0 \geq 8}$ → No cumple la inecuación, luego no es solución factible.

5. La región factible solución es, por tanto:



Haciendo este mismo procedimiento para representar el resto de inecuaciones restricción, nos queda la siguiente área o región factible acotada que surge como intersección de todas las áreas factibles de las distintas inecuaciones (incluyendo las rectas ya que las inecuaciones presentan las desigualdades ≥ y ≤):



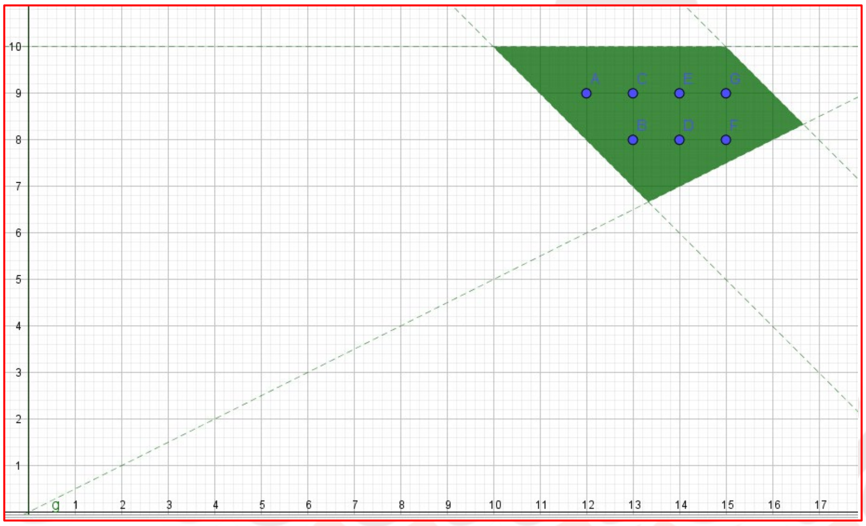
Por lo tanto, todas las soluciones enteras positivas posibles (ya que no podemos tener 1,5 comics) serán aquellas que se encuentren dentro de esta región factible:

(5,3) (5,4) (6,2) (6,3) (6,4) (7,1) (7,2) (8,0) $\rightarrow$ **8 soluciones**

- **5 comics Novedades y 3 comics de oferta.**
- **5 comics Novedades y 4 comics de oferta.**
- **6 comics Novedades y 2 comics de oferta.**
- **6 comics Novedades y 3 comics de oferta.**
- **6 comics Novedades y 4 comics de oferta.**
- **7 comics Novedades y 1 comics de oferta.**
- **7 comics Novedades y 2 comics de oferta.**
- **8 comics Novedades y 0 comics de oferta.**

Ejercicio 20

Queremos hacer una serie de pulseras con una serie de cuentas azules y amarillas con una serie de características. Deben tener al menos más de 20 y menos de 25 cuentas. Las cuentas amarillas deben ser menos de 10 y más de la mitad de las cuentas azules. Indica de cuántas pulseras diferentes podemos formar.



Pulsera con 12 cuentas azules y 9 cuentas amarillas

Pulsera con 13 cuentas azules y 8 cuentas amarillas

Pulsera con 13 cuentas azules y 9 cuentas amarillas

Pulsera con 14 cuentas azules y 8 cuentas amarillas

Pulsera con 14 cuentas azules y 9 cuentas amarillas

Pulsera con 15 cuentas azules y 8 cuentas amarillas

Pulsera con 15 cuentas azules y 9 cuentas amarillas