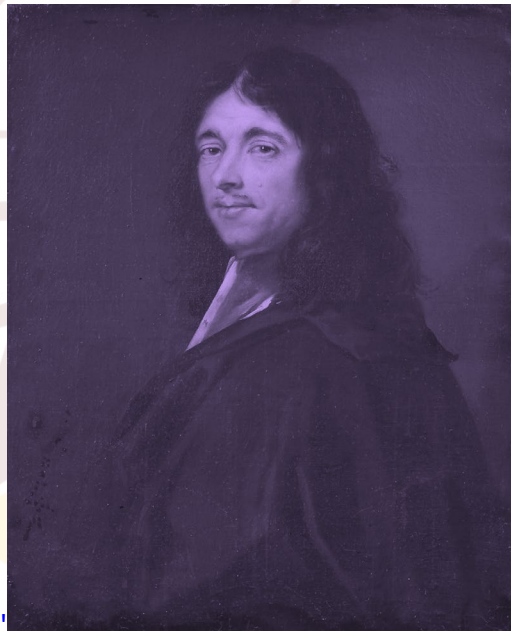


SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS

TEMA 4

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.
ECUACIONES BICUADRADAS. ECUACIONES
DE GRADO SUPERIOR A 2. SISTEMAS DE
ECUACIONES CON TRES INCÓGNITAS.
SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES.



“Es imposible encontrar la forma de convertir un cubo en la suma de dos cubos, una potencia cuarta en la suma de dos potencias cuartas, o en general cualquier potencia más alta que el cuadrado en la suma de dos potencias de la misma clase; para este hecho he encontrado una demostración excelente. El margen es demasiado pequeño para que la demostración quepa en él.”

Pierre de Fermat Beaumont-de-Lomagne (1601- 1665)

Ejercicio 1

Resolver las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas aplicando el método más conveniente en cada caso (no vale utilizar la fórmula general), y comprobar en cada caso las soluciones obtenidas:

a) $x^2 + 5x = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = -5$

b) $x^2 - 16 = 0$

$x_1 = 4$

$x_2 = -4$

c) $2x^2 - 18 = 0$

$x_1 = 3$

$x_2 = -3$

d) $5x^2 + x = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = -1/5$

e) $x(x+2) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = -2$

f) $x^2 + 16 = 0$

~~∃~~ solución en los reales.

La solución en números complejos es $x_1 = +4i$ y $x_2 = -4i$

g) $4 - 25x^2 = 0$

$x_1 = 2/5$

$x_2 = -2/5$

h) $(x+1)(x-1) = 2(x^2 - 13)$

$x_1 = 5$

$x_2 = -5$

i) $x/2 + 2x^2 = -x(x-1)$

$x_1 = 0$

$x_2 = 1/6$

Ejercicio 2

Resolver las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$

$x_1 = 2$

$x_2 = 4$

b) $x^2 - 4x + 21 = 0$

∄ solución en los reales.

La solución en números complejos es $x_1 = 2 + i\sqrt{17}$ y $x_2 = 2 - i\sqrt{17}$

c) $x^2 - 4x + 4 = 0$

$x_1 = x_2 = 2$

d) $x^2/9 - x + 2 = 0$

$x_1 = 3$

$x_2 = 6$

e) $(x+2)(x-5) = 0$

$x_1 = -2$

$x_2 = 5$

f) $x^2 = 4$

$x_1 = 2$

$x_2 = -2$

g) $4 - 25x^2 = 0$

$x_1 = 2/5$

$x_2 = -2/5$

h) $(x+1)(x-1) = 2(x^2 - 13)$

$x_1 = 5$

$x_2 = -5$

i) $x/2 + 2x^2 = -x(x-1)$

$x_1 = 0$

$x_2 = 1/6$

Ejercicio 3

a) Determinar para qué valores de **m** la ecuación $2x^2 - 5x + m = 0$ tiene una solución.

$$m = \frac{25}{8}$$

b) ¿Para qué valores de **a** la ecuación $x^2 - 6x + 3 + a = 0$ tiene solución única?

$$a = 6$$

c) Determinar para qué valores de **b** la ecuación $x^2 - bx + 25 = 0$ tiene una sola solución.

$$b = \pm 10$$

Academia



Pyro

Ejercicio 4

Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas, comprobando las soluciones obtenidas:

a) $x^4 - 26x^2 = -25$

$x_1 = 1$

$x_2 = -1$

$x_3 = 5$

$x_4 = -5$

b) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

$x_1 = 2$

$x_2 = -2$

$x_3 = 1/2$

$x_4 = -1/2$

c) $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$

$x_1 = 3$

$x_2 = -3$

$x_3 = 5$

$x_4 = -5$

d) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$

$x_1 = 1/2$

$x_2 = -1/2$

$x_3 = 1/3$

$x_4 = -1/3$

Ejercicio 5

Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales, comprobando las soluciones obtenidas:

a) $\sqrt{x+4} = 7$

$x = 45$

b) $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$

$x = 4$

c) $\sqrt{5x-7} - \sqrt{1-x} = 0$

$\nexists$ solución real.

d) $36 + x + 4 - 12\sqrt{x+4} = 2x - 1$

$x = 5$

(La $x = 221$ se descarta)

e) $7 + 2x = 1 + x + 3 + 2\sqrt{3+x}$

$x_1 = -3$

$x_2 = 1$

f) $6\sqrt{x} - 5 = x + 3$

$x_1 = 4$

$x_2 = 16$

Ejercicio 6

Resuelve las siguientes ecuaciones de grado superior a dos:

a) $x^4 - x^2 = 0$

$x_1 = x_2 = 0$

$x_3 = 1$

$x_4 = -1$

b) $x^3 - x^2 - 12x = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = 4$

$x_3 = -3$

c) $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

$x_3 = 4$

d) $x^4 - x^3 - 9x^2 + 3x + 18 = 0$

$x_1 = -2$

$x_2 = 3$

$x_3 = \sqrt{3}$

$x_4 = -\sqrt{3}$

Ejercicio 7

Resolver las siguientes ecuaciones, operando convenientemente en cada caso (para así pasarlas a la forma general si resulta conveniente), y comprobar el resultado:

a) $2x^2 + 5x = 5 + 3x - x^2$

$x_1 = 1$

$x_2 = -5/3$

b) $(3x - 2)^2 + 5x^2 = (3x + 2)(3x - 2)$

∅ solución.

c) $(2x + 3)(2x - 3) + 5x = 2(x + 1) - 1$

$x_1 = -2$

$x_2 = 5/4$

d) $(3x - 2)^2 = (2x + 3)(2x - 3) + 3(x + 1)$

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

e) $x^4 + 16 = 0$

∅ solución.

f) $x^4 - 16 = 0$

$x_1 = 2$

$x_2 = -2$

g) $x^6 - 64 = 0$

$x_1 = 2$

$x_2 = -2$

h) $(x + 3)(x - 3) - (x - 2)^2 = 6 + x(x - 5)$

$x_1 = \frac{9 + \sqrt{5}}{2}$

$x_2 = \frac{9 - \sqrt{5}}{2}$

Ejercicio 8

Resolver las siguientes ecuaciones, operando convenientemente en cada caso (para así pasarlas a la forma general si resulta conveniente), y comprobar el resultado:

a) $\frac{x^2-4}{x+3} = 0$

$x_1 = 2$

$x_2 = -2$

b) $\frac{x^2-4}{x+3} = -12$

$x_1 = -4$

$x_2 = -8$

c) $\frac{3x^2+2x}{5x^2-3} = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = -2/3$

d) $1064 = \frac{4+6(x-1)}{2} \cdot x$

$x_1 = 19$

$x_2 = -56/3$

e) $\frac{x^2-1}{3} - \frac{x-1}{6} = 2 + \frac{x}{9}$

$x_1 = 3$

$x_2 = -13/6$

f) $\frac{(x+2)(x-2)}{12} + \frac{2x+1}{18} - \frac{6-5(x-2)}{6} = \frac{3(x-1)^2+11}{36}$

$x = 3$

g) $(3x^2 - 12)(x^2 - x + 2)(x^2 + 1) = 0$

$x_1 = 2$

$x_2 = -2$

Ejercicio 9

La suma de las edades de un padre y su hija es 56 años. Hace 10 años, el padre tenía el quíntuple de años que la hija. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

1. En primer lugar, determino como incógnitas p para la edad actual del padre y h para la edad actual de la hija.

2. Planteamos las ecuaciones con esas incógnitas y los datos del enunciado:

"La suma de las edades de un padre y su hija es 56 años" $\rightarrow p + h = 56$

"Hace 10 años, el padre tenía el quíntuple de años que la hija" $\rightarrow p - 10 + 5 \cdot (h - 10)$

3. Tenemos un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas:

$$\begin{cases} p + h = 56 \\ p - 10 + 5 \cdot (h - 10) \end{cases}$$

4. Resolvemos el sistema usando el **método de sustitución**. Para ello, despejamos p en la segunda ecuación y luego la sustituimos en la primera:

$$p - 10 = 5(h - 10) \rightarrow p - 10 = 5h - 50 \rightarrow p = 5h - 40$$

Ahora sustituimos en la primera:

$$(5h - 40) + h = 56 \rightarrow 6h - 40 = 56 \rightarrow 6h = 96 \rightarrow h = 16$$

Entonces, la edad de la hija es 16 años. Ahora sustituimos $h = 16$ en cualquiera de las dos ecuaciones planteadas para obtener p :

$$p = 5h - 40 \rightarrow p = 5 \cdot 16 - 40 \rightarrow p = 80 - 40 \rightarrow p = 40$$

Solución:

La edad actual del padre es 40 años y la de la hija es 16 años

Ejercicio 10

María se ha comprado una camiseta y unos pantalones. Los precios de las prendas suman 60 €, pero le han hecho un descuento del 10% en la camiseta y un 20% en los pantalones, y paga por todo 50,15 €. ¿Cuál era el precio sin rebajar de cada una de las prendas?

1. En primer lugar, planteo las incógnitas que usaremos en el problema.

x = Precio sin descuento de la camiseta

y = Precio sin descuento de los pantalones

2. Planteamos las ecuaciones con esas incógnitas y los datos del enunciado:

"Los precios de las prendas suman 60€" → **$x + y = 60$**

"descuento del 10% en la camiseta y un 20% en los pantalones, y paga por todo 50,15€" → **$0,9x + 0,8y = 50,15$**

3. Tenemos un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas:

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ 0,9x + 0,8y = 50,15 \end{cases}$$

4. Resolvemos el sistema usando el **método de reducción**. Para ello, multiplicamos la primera ecuación por 0,8 y luego restamos las ecuaciones. De esta forma se eliminan las y y puedo despejar la x .

$$\begin{cases} 0,8x + 0,8y = 48 \\ 0,9x + 0,8y = 50,15 \end{cases}$$

Restamos las ecuaciones:

$$0,8x + 0,8y - 0,9x - 0,8y = 48 - 50,15 \rightarrow -0,1x = -2,15 \rightarrow x = \frac{2,15}{0,1} = 21,5$$

Entonces, el precio sin descuento de la camiseta es de 21,5€. Ahora sustituimos **$x = 21,5$** en cualquiera de las dos ecuaciones planteadas para obtener y :

$$x + y = 60 \rightarrow 21,5 + y = 60 \rightarrow y = 60 - 21,5 = 38,5$$

Solución:

El precio de la camiseta sin rebajar es de 21,5 € y el de los pantalones es de 38,50 €.

Ejercicio 1

Pedro y Arturo han ido de rebajas. El primero ha comprado un traje de 42€ y unos zapatos de 24€ y, el segundo, un jersey de 28€ y unos pantalones de 60€. Tras aplicar los descuentos, Pedro ha pagado 50,40€ y Arturo, 64,40€. Calcula los descuentos en porcentaje que se han aplicado sabiendo que el descuento que se ha aplicado al traje y al jersey coinciden y el aplicado a los zapatos y a los pantalones también.

1. En primer lugar, planteo las incógnitas que usaremos en el problema.

d_1 = Descuento aplicado en porcentaje al traje y al jersey

d_2 = Descuento aplicado en porcentaje a los zapatos y a los pantalones

2. Planteamos las ecuaciones con esas incógnitas y los datos del enunciado:

Ecuaciones para Pedro:

El precio que ha pagado por el traje con descuento es $42(1 - d_1)$.

El precio que ha pagado por los zapatos con descuento es $24(1 - d_2)$.

El precio total que ha pagado Pedro es 50,40, por lo tanto:

$$42(1 - d_1) + 24(1 - d_2) = 50,40$$

Ecuaciones para Arturo:

El precio que ha pagado por el jersey con descuento es $28(1 - d_1)$.

El precio que ha pagado por los pantalones con descuento es $60(1 - d_2)$.

El precio total que ha pagado Arturo es 64,40, por lo tanto:

$$28(1 - d_1) + 60(1 - d_2) = 64,40$$

3. Tenemos un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas:

$$\begin{cases} 42(1 - d_1) + 24(1 - d_2) = 50,40 \\ 28(1 - d_1) + 60(1 - d_2) = 64,40 \end{cases}$$

4. Resolvemos el sistema usando el **método de igualación**. Para ello, despejamos en ambas ecuaciones d_1 y lo igualamos, obteniendo d_2 . Primero simplifico las ecuaciones:

$$\begin{cases} 42(1 - d_1) + 24(1 - d_2) = 50,40 \\ 28(1 - d_1) + 60(1 - d_2) = 64,40 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -42d_1 - 24d_2 = -15,60 \\ -28d_1 - 60d_2 = -23,60 \end{cases}$$

Despejamos d_1 de las dos ecuaciones e igualamos:

$$\begin{cases} -42d_1 - 24d_2 = -15,60 \rightarrow d_1 = \frac{15,60 - 24d_2}{42} \\ -28d_1 - 60d_2 = -23,60 \rightarrow d_1 = \frac{23,60 - 60d_2}{28} \end{cases}$$

$$\frac{15,60 - 24d_2}{42} = \frac{23,60 - 60d_2}{28} \rightarrow 28 \cdot (15,60 - 24d_2)$$

$$= 42 \cdot (23,60 - 60d_2) \rightarrow$$

$$\rightarrow 436,8 - 672d_2 = 991,2 - 2520d_2 \rightarrow 2520d_2 - 672d_2$$

$$= 991,2 - 436,8 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1848d_2 = 554,4 \rightarrow d_2 = \frac{554,4}{1848} = 0,3$$

Entonces, el descuento aplicado en porcentaje a los zapatos y a los pantalones es del 30%. Ahora sustituimos $d_2 = 0,3$ en cualquiera de las dos ecuaciones planteadas para obtener d_1 :

$$\begin{aligned} 42(1 - d_1) + 24(1 - d_2) &= 50,40 \rightarrow 42(1 - d_1) + 24(1 - 0,3) = 50,40 \rightarrow \\ \rightarrow 42(1 - d_1) + 24 \cdot 0,7 &= 50,40 \rightarrow 42 - 42 \cdot d_1 + 16,80 = 50,40 \rightarrow \\ \rightarrow -42 \cdot d_1 &= 50,40 - 42 - 16,8 \rightarrow d_1 = \frac{42 + 16,8 - 50,40}{42} = 0,2 \end{aligned}$$

Solución:

El descuento aplicado en porcentaje a los zapatos y a los pantalones es del 30%, mientras que el porcentaje de descuento sobre el traje y el jersey es del 20%.

Ejercicio 12

Ana se dispone a invertir 100000 €. En el banco le ofrecen dos productos: Fondo A, al 4 % de interés anual, y Fondo B, al 6 % de interés anual. Invierte una parte en cada tipo de fondo y al cabo del año obtiene 4500 € de intereses. ¿Cuánto adquirió de cada producto?

1. En primer lugar, planteo las incógnitas que usaremos en el problema.

A = Cantidad que Ana invirtió en el Fondo A (al 4% de interés anual)

B = Cantidad que Ana invirtió en el Fondo B (al 6% de interés anual)

2. Planteamos las ecuaciones con esas incógnitas y los datos del enunciado:

"Ana se dispone a invertir 100000 €" → **$A + B = 100000$**

"Invierte una parte en cada tipo de fondo y al cabo del año obtiene 4500 € de intereses" → **$0,04A + 0,06B = 4500$**

3. Tenemos, un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas:

$$\begin{cases} A + B = 100000 \\ 0,04A + 0,06B = 4500 \end{cases}$$

4. Resolvemos el sistema usando el **método de sustitución**. Para ello, despejamos A en la primera ecuación y luego la sustituimos en la segunda:

$$A + B = 100000 \rightarrow A = 100000 - B$$

Ahora sustituimos en la segunda:

$$\begin{aligned} 0,04A + 0,06B &= 4500 \rightarrow 0,04 \cdot (100000 - B) + 0,06B = 4500 \rightarrow \\ &\rightarrow 4000 - 0,04B + 0,06B = 4500 \rightarrow 0,02B = 500 \rightarrow B = \frac{500}{0,02} = 25000 \end{aligned}$$

Entonces, la cantidad que Ana invirtió en el fondo B fue de 25000 €. Ahora sustituimos **B = 25000** en cualquiera de las dos ecuaciones planteadas para obtener A:

$$\begin{aligned} A + B &= 100000 \rightarrow A + 25000 = 100000 \rightarrow A = 100000 - 25000 \\ &= 75000 \end{aligned}$$

Solución:

Ana invirtió 75000 € en el fondo A y 25000 € en el fondo B.

Ejercicio 12

Resuelve utilizando el método de reducción de Gauss, los sistemas:

$$a) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ -2x + y + 4z = 2 \end{cases}$$

Se nos presenta un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas al que se nos pide que le apliquemos el método de Gauss para su resolución. Primero, escribimos el sistema en forma de matriz aumentada y luego operamos las distintas ecuaciones entre sí para convertir este sistema de ecuaciones lineales en otro escalonado:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ -2x + y + 4z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow E1 \\ \rightarrow E2 \\ \rightarrow E3 \end{matrix}$$

Operando las distintas ecuaciones vamos “haciendo cero” las distintas incógnitas de forma escalonada sometiendo a las ecuaciones a transformaciones elementales. Estas transformaciones elementales son:

- Multiplicar por un número distinto de cero.
- Sumar una ecuación a otra multiplicada por un número.

De esta forma, en nuestro sistema haríamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} E2 - 3 \cdot E1 \\ E3 + 2 \cdot E1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E3 - 3 \cdot E2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y - 4z = -2 \\ -6z = 0 \end{cases}$$

Ahora vamos despejando las incógnitas de este nuevo sistema de ecuaciones para obtener el valor de las incógnitas:

$$-6z = 0 \rightarrow z = -\frac{0}{6} \rightarrow \mathbf{z = 0}$$

$$-y - 4z = -2 \rightarrow -y - 4 \cdot 0 = -2 \rightarrow -y = -2 \rightarrow y = 2$$

$$x + y + z = 2 \rightarrow x + 2 + 0 = 2 \rightarrow x = 2 - 2 \rightarrow x = 0$$

Solución:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases}$$

Se nos presenta un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas al que se nos pide que le apliquemos el método de Gauss para su resolución. Primero, escribimos el sistema en forma de matriz aumentada y luego operamos las distintas ecuaciones entre sí para convertir este sistema de ecuaciones lineales en otro escalonado:

$$\begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow E1 \\ \rightarrow E2 \\ \rightarrow E3 \end{matrix}$$

Operando las distintas ecuaciones vamos “haciendo cero” las distintas incógnitas de forma escalonada sometiendo a las ecuaciones a transformaciones elementales. Estas transformaciones elementales son:

- Multiplicar por un número distinto de cero.
- Sumar una ecuación a otra multiplicada por un número.

De esta forma, en nuestro sistema haríamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} E2 - E1 \\ E3 - E1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & -4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{E3 - \frac{3}{2} \cdot E2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ 2y - 2z = 6 \\ z = -1 \end{cases}$$

Ahora vamos despejando las incógnitas de este nuevo sistema de ecuaciones para obtener el valor de las incógnitas:

$$z = -1$$

$$2y - 2z = 6 \rightarrow 2y - 2 \cdot (-1) = 6 \rightarrow y = \frac{4}{2} \rightarrow y = 2$$

$$x - y + 3z = -4 \rightarrow x - 2 + 3 \cdot (-1) = -4 \rightarrow x = -4 + 2 + 3 \rightarrow x = 1$$

Solución:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Academia



Pyro

Ejercicio 14

Aplicando el método de Gauss discute, en función de los valores del parámetro m , los sistemas:

$$a) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ -2x + y + mz = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ -2x + y + mz = 2 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} (E2 - 3E1) \\ (E3 + 2E1) \end{matrix}} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y - 4z = -2 \\ 3y + (m+2)z = 6 \end{cases} \xrightarrow{(E3 + 3E2)} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y - 4z = -2 \\ (m+10)z = 0 \end{cases}$$

Si $m = 10$, queda $E3 \equiv (m - 10)z = 0 \rightarrow$ Esta ecuación se cumple para cualquier valor de z .

El sistema resultante es compatible indeterminado. Para hallar su solución puede hacerse $z = t$ y llevar ese valor a las demás ecuaciones.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y - 4z = -2 \\ z = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + t = 2 \\ -y - 4t = -2 \\ z = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = t \end{cases}$$

Si $m \neq 10$, de $E3 \equiv (m - 10)z = 0 \rightarrow z = 0 \rightarrow$ Observa que, despejando $z = \frac{0}{m-10} = 0$.

El sistema resultante es compatible determinado. Para hallar su solución se sustituye $z = 0$ en las demás ecuaciones, resultando:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y - 4z = -2 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + 0 = 2 \\ -y - 0 = -2 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y + 2z = m \\ 2x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z = m \\ 2x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} (E2 - 2E1) \\ (E3 - E1) \end{matrix}} \begin{cases} x - y + 2z = m \\ 3y - 3z = 2 - 2m \\ 3y - 3z = 6 - m \end{cases} \xrightarrow{(E3 - E2)} \begin{cases} x - y + 2z = m \\ 3y - 3z = 2 - 2m \\ 0 = 4 + m \end{cases}$$

La tercera ecuación: $E3 \equiv 0 = 4 + m$, sólo tiene sentido si $m = -4$, resultando $0 = 0$. Se pierde

una ecuación: el sistema será compatible indeterminado, equivalente a $\begin{cases} x - y + 2z = -4 \\ 3y - 3z = 10 \\ m = -4 \end{cases}$

Su solución puede darse en función de alguna de las incógnitas. Así, si se hace $z = t$, el sistema

$$\text{queda } \begin{cases} x - y + 2t = -4 \\ 3y - 3t = 10 \\ z = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -4 + y - 2t \\ y = \frac{10}{3} + t \\ z = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} - t \\ y = \frac{10}{3} + t \\ z = t \end{cases}$$

Como se ha dicho, para $m \neq -4$, el sistema será incompatible.

Ejercicio 15

Una tienda posee 3 tipos de conservas, A, B y C. El precio medio de las 3 conservas es de 0.90 €. Un cliente compra 30 unidades de A, 20 de B y 10 de C, debiendo abonar 56 €. Otro compra 20 unidades de A y 25 de C y abona 31 €. Calcula el precio de una unidad A, otra de B y otra de C.

En primer lugar, planteamos las ecuaciones que nos dice el enunciado, para lo que definimos las incógnitas con las que trabajaremos.

Incógnitas del problema:

x = precio de una unidad de la conserva A

y = precio de una unidad de la conserva B

z = precio de una unidad de la conserva C

Ecuaciones:

"El precio medio de las 3 conservas es de 0.90 €" $\rightarrow \frac{x+y+z}{3} = 0,9 \rightarrow x + y + z = 2,7$

"Un cliente compra 30 unidades de A, 20 de B y 10 de C, debiendo abonar 56 €" $\rightarrow$
 $\rightarrow 30x + 20y + 10z = 56$

"Otro compra 20 unidades de A y 25 de C y abona 31 €" $\rightarrow 20x + 25z = 31$

Se nos presenta por tanto un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, por lo que se puede aplicar el método de Gauss para su resolución.

$$\begin{cases} x + y + z = 2,7 \\ 30x + 20y + 10z = 56 \\ 20x + 25z = 31 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2,7 \\ 30 & 20 & 10 & 56 \\ 20 & 0 & 25 & 31 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow E1 \\ \rightarrow E2 \\ \rightarrow E3 \end{matrix}$$

Como ya sabemos, en el método de Gauss consiste en convertir este sistema de ecuaciones lineales en otro escalonado operando entre las distintas ecuaciones. Para simplificar el proceso se disponen estas ecuaciones en forma de matriz. De esta forma, vamos "haciendo cero" las distintas incógnitas de forma escalonada sometiendo a las ecuaciones a transformaciones elementales. Estas transformaciones elementales son:

- **Multiplicar por un número distinto de cero.**
- **Sumar una ecuación a otra multiplicada por un número.**

De esta forma, en nuestro sistema haríamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2,7 \\ 30 & 20 & 10 & 56 \\ 20 & 0 & 25 & 31 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{E2 - 30 \cdot E1 \\ E3 + 20 \cdot E1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2,7 \\ 0 & -10 & -20 & -25 \\ 0 & -20 & 5 & -23 \end{pmatrix} \xrightarrow{E3 - 2 \cdot E2}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2,7 \\ 0 & -10 & -20 & -25 \\ 0 & 0 & 45 & 27 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2,7 \\ -10y - 20z = -25 \\ 45z = 27 \end{cases}$$

Ahora vamos despejando las incógnitas de este nuevo sistema de ecuaciones para obtener las soluciones del problema:

$$\begin{aligned}
 45z &= 27 \rightarrow z = \frac{27}{45} \rightarrow z = 0,6 \\
 -10y - 20z &= -25 \rightarrow -10y - 20 \cdot 0,6 = -25 \rightarrow -10y - 12 = -25 \rightarrow y = \frac{25 - 12}{10} \rightarrow y = 1,3 \\
 x + y + z &= 2,7 \rightarrow x + 1,3 + 0,6 = 2,7 \rightarrow x = 2,7 - 1,3 - 0,6 \rightarrow x = 0,8
 \end{aligned}$$

Llegados a este punto, fijémonos que los resultados que nos dan tienen sentido. Los precios obtenidos son valores positivos lo que tiene sentido matemático.

Solución:

Cada unidad de conserva de tipo A cuesta 0,80 €, cada una de tipo B, 1,30 € y cada una de tipo C, 0,60 €.

Ejercicio 16

Se juntan 30 personas entre hombres, mujeres y niños. Se sabe que entre los hombres y las mujeres duplican al número de niños. También se sabe que entre los hombres y el triple de las mujeres exceden en 20 al doble de niños. Plantear un sistema de ecuaciones que permita averiguar el número de hombres, mujeres y niños. Resolver el sistema de ecuaciones planteado y comentar el resultado.

Solución: Hay 10 hombres, 10 mujeres y 10 niños.

Academia



Pyro

Ejercicio 17

Un estado compra 540 000 barriles de petróleo a tres suministradores diferentes que lo venden a 27, 28 y 31 \$ el barril, respectivamente. La factura total asciende a 15 999 000 \$. Si del primer suministrador recibe el 30% del total del petróleo comprado, ¿cuál es la cantidad comprada a cada suministrador?

Solución: Se compraron 162000 barriles al primer suministrador, 31000 barriles al segundo suministrador y 347000 al tercero.

Academia



Pyro

Ejercicio 18

Un fabricante de coches ha lanzado al mercado tres nuevos modelos (A, B y C). El precio de venta de cada modelo es 1.5, 2 y 3 millones de PTAS, respectivamente, ascendiendo el importe total de los coches vendidos durante el primer mes a 250 millones. Por otra parte, los costes de fabricación son de 1 millón por coche para el modelo A, de 1.5 para el modelo B y de 2 para el C. El coste total de fabricación de los coches vendidos en ese mes fue de 175 millones y el número total de coches vendidos 140. Plantea un sistema para determinar el número de coches vendidos de cada modelo y resuelve el problema.

Solución: Se compraron 162000 barriles al primer suministrador, 31000 barriles al segundo suministrador y 347000 al tercero.

Academia



Pyro

Ejercicio 19

Un almacén distribuye cierto producto que fabrican 3 marcas distintas: A, B y C. La marca A lo envasa en cajas de 250 gramos y su precio es de 100 €, la marca B lo envasa en cajas de 500 gramos a un precio de 180 € y la marca C lo hace en cajas de 1 kilogramo a un precio de 330 €. El almacén vende a un cliente 2.5 kilogramos de este producto por un importe de 890 €. Sabiendo que el lote iba envasado en 5 cajas, plantea un sistema para determinar cuántas cajas de cada tipo se han comprado y resuelve el problema.

Solución: Se han comprado 2 cajas de 250 g, 2 cajas de 500 g y 1 caja de 1 kg.

Academia



Pyro

Ejercicio 20

Un distribuidor de material escolar ha clasificado 120 lápices en cajas de tres tamaños: 3 de tipo pequeño, 5 mediano y 2 grande. Una vez clasificados han sobrado 6 lápices. Además, se sabe que las cajas medianas contienen el doble que las cajas pequeñas y las grandes el triple. Plantea un sistema para determinar el número de lápices que contiene cada tipo de caja y resuelve el problema.

Solución: Hay 6 lápices en cada caja pequeña, 12 lápices en cada caja mediana y 18 lápices en cada caja grande.

Academia



Pyro

Ejercicio 21

Se dispone de un recipiente de 24 litros de capacidad y de tres medidas, A, B y C. Se sabe que el volumen de A es el doble del de B, que las tres medidas llenan el depósito y que las dos primeras lo llenan hasta la mitad. ¿Qué capacidad tiene cada medida?

Solución: La capacidad de la medida A es de 8 litros, la de la medida B es de 4 litros y la del C es de 12 litros.

Academia



Pyro

Ejercicio 22

Las edades de tres hermanos son tales que el quíntuplo de la edad del primero, más el cuádruplo de la edad del segundo, más el triple de la edad del tercero, es igual a 60. El cuádruplo de la edad del primero, más el triple de la edad del segundo, más el quíntuplo de la del tercero, es igual a 50. Y el triple de la edad del primero, más el quíntuplo de la del segundo, más el cuádruplo de la del tercero, es igual a 46.

- Plantea un sistema de ecuaciones que permita determinar las edades de los tres hermanos.
- Resuelve el sistema planteado y comenta los resultados.

Solución: El hermano mayor tiene 9 años, el mediano tiene 3 años y el pequeño 1 año.

Academia



Pyro

Ejercicio 23

Un ama de casa adquirió en el mercado ciertas cantidades de patatas, manzanas y naranjas a un precio de 0.60 €, 0.72 € y 0.90 €/kg, respectivamente. El importe total de la compra fueron 6.96 €. El peso total de la misma es de 9 kg y, además compró 1 kg más de naranjas que de manzanas.

- Plantea un sistema de ecuaciones para determinar la cantidad comprada de cada producto.
- Resuelve el problema.

Solución: Se han comprado 2 kg de patatas, 3 kg de manzanas y 4 kg de naranjas.

Academia



Pyro

Ejercicio 24

En un determinado pueblo se representan 3 espectáculos que llamaremos E1, E2 y E3, respectivamente, cada uno con un precio diferente. Calcula el precio de cada espectáculo sabiendo lo siguiente: Si asistiéramos 2 veces a E1, una vez a E2 y también una a E3, nos costaría 34 €. Si asistiéramos 3 veces a E1 y una a E2, nos costaría 46.5 €. En el caso de asistir una vez a cada uno de los espectáculos nos costaría 21.5 €.

Solución: El precio del espectáculo E1 es 12,5€ , el de E2 es de 9€, y el de E3 es gratuito.

Academia



Pyro

Ejercicio 25

En cierto colegio, al principio de curso, la relación del número de alumnas al de alumnos era de $8/7$. Al finalizar el curso, habían causado baja, por diversas causas, 40 chicas y el 4% de los chicos, y la relación era de $15/14$. ¿Cuántos alumnos de cada sexo acabaron el curso?

Solución: Al principio de curso había 280 alumnos y 320 alumnas.

Academia



Pyro

Ejercicio 26

Una persona decide invertir una cantidad de 12000 € en bolsa, comprando acciones de tres empresas distintas A, B y C. Invierte en A el doble que en B y C juntas. Transcurrido un año, las acciones de la empresa A se han revalorizado un 4 %, las de B un 5 % y las de C han perdido un 2 % de su valor original. Como resultado de todo ello, Juan ha obtenido un beneficio de 432,5 €. Determina cuánto invirtió en cada una de las empresas.

Solución: A = 8000 €; B = 2750 €; C = 1250 €.

Academia



Pyro

Ejercicio 27

Dado un número de tres cifras ABC , se sabe que la suma de sus cifras es 16. Por otra parte, si se permutan las centenas con las unidades, se obtiene el número inicial incrementado en 198. Si en el número inicial se permutan decenas con unidades, se obtiene el inicial disminuido en 27. Plantea el sistema de ecuaciones lineales que conduzca a la obtención de las cifras del citado número.

Propuesto en Selectividad en 2000, Andalucía

Solución: El número dado es el 385.

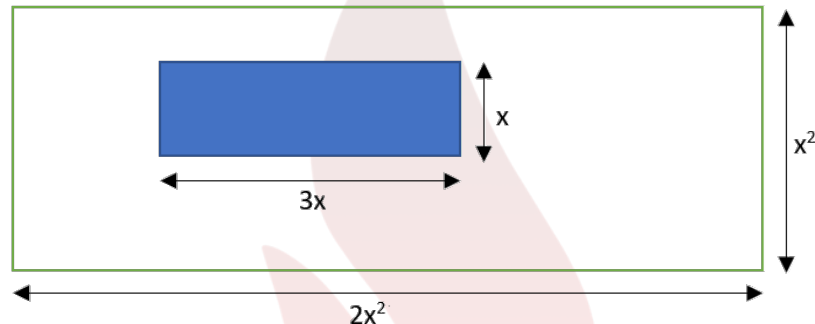
Academia



Pyro

Ejercicio 28

Se quiere construir una piscina rectangular en un jardín y para ello se dibuja un esquema con las dimensiones del jardín y la piscina. ¿Cuáles son las dimensiones de la piscina, si la diferencia de áreas entre el jardín y la piscina es de 135 m^2 ?



Oposición CEIS de la CARM, 2019

1. Información del problema:

El área de la piscina es de $x \cdot 3x = 3x^2$

El área del jardín es $x^2 \cdot 2x^2 = 2x^4$

La diferencia de áreas entre el jardín y la piscina es 135 m^2 .

2. Ecuación resultante:

Esto nos da la siguiente ecuación:

$$\text{Área del jardín} - \text{Área de la piscina} = 135$$

$$2x^4 - 3x^2 = 135$$

3. Resolución de la ecuación:

PASO 1:

Tenemos una ecuación bicuadrada. Para resolverla podemos hacer un cambio de variable para poder resolverla con la fórmula general de una ecuación de segundo grado. Si realizamos el siguiente cambio de variable $y = x^2$, nos queda la ecuación:

$$\begin{aligned} 2x^4 - 3x^2 = 135 &\rightarrow 2(x^2 \cdot x^2) - 3x^2 = 135 \rightarrow 2(y \cdot y) - 3y = 135 \rightarrow \\ &\rightarrow 2y^2 - 3y = 135 \end{aligned}$$

Reordenando la ecuación:

$$2y^2 - 3y - 135 = 0$$

PASO 2:

Para resolver esta ecuación cuadrática $ay^2 + by + c = 0$, usamos la fórmula general donde $a = 2$, $b = -3$, y $c = -135$:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$y = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-135)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 1080}}{4} = \frac{3 \pm 33}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{3 + 33}{4} = 9 \\ y_2 = \frac{3 - 33}{4} = -7,5 \end{cases}$$

PASO 3:

Deshacemos ahora el cambio de variable tomando el resultado positivo solamente ya que $x^2 \geq 0$ para que nos den resultados reales.

$$y_1 = 9 = x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{9} = 3 \\ x_2 = -\sqrt{9} = -3 \end{cases}$$

4. Discrimino los resultados válidos:

Ya hemos descartado las soluciones complejas de la ecuación (las que vienen de deshacer el cambio de variable con $y_2 = -7,5$) y ahora debemos analizar también si descartamos alguna de las soluciones reales. En nuestro caso, lo que nos preguntan son las dimensiones de una piscina, por lo no pueden ser números negativos, ya que no tendría sentido matemático dar una longitud negativa.

Por lo tanto, el resultado válido es el de $x_1 = 3$.

5. Obtengo las dimensiones de la piscina:

Ahora que sabemos que $x = 3$, podemos calcular las dimensiones de la piscina:

El largo de la piscina es $3x = 3 \cdot 3 = 9$ metros

El ancho de la piscina es $x = 3$ metros.

Solución:

El largo de la piscina es de 9 metros y su ancho de 3 metros.

Ejercicio 29

Una parcela rectangular (A) es 40 m más larga que ancha. Al urbanizarla zona, la parcela resultante (B) disminuye respecto a la parcela original (A) 8 m de largo y 5 m. de ancho. Con esta disminución, el perímetro de la parcela (B) es una décima parte menor que el perímetro de la parcela (A), determina: ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela (A) (largo y ancho)?

Oposición CEIS de la CARM, 2023

1. Cálculo de las Dimensiones de la Parcela

Se plantea un problema donde una parcela rectangular (A) tiene un largo que es 40 metros más que su ancho. Al urbanizar la zona, la parcela resultante (B) reduce su largo en 8 metros y su ancho en 5 metros. Además, el perímetro de la parcela B es una décima parte menor que el perímetro de la parcela A. Se requiere determinar las dimensiones originales de la parcela A.

2. Definición de variables:

De la parcela A:

$$\text{Ancho de la parcela A} = x$$

$$\text{Largo de la parcela A} = x + 40$$

La parcela B tiene:

$$\text{Ancho de la parcela B} = x - 5$$

$$\text{Largo de la parcela B} = (x + 40) - 8 = x + 32$$

3. Cálculo de perímetros:

El perímetro de un rectángulo se calcula como:

$$P = 2 \cdot (\text{largo} + \text{ancho})$$

Para la parcela A:

$$P_A = 2(x + x + 40) = 4x + 80$$

Para la parcela B:

$$P_B = 2(x + 32 + x - 5) = 4x + 54$$

4. Planteamiento de la Ecuación:

Dado que el perímetro de la parcela B es una décima parte menor que el de la parcela A:

$$P_B = P_A - \frac{P_A}{10}$$

Sustituyendo valores:

$$4x + 54 = 4x + 80 - \frac{4x + 80}{10}$$

Multiplicamos por 10 para eliminar fracción:

$$10(4x + 54) = 10(4x + 80) - (4x + 80)$$

$$40x + 540 = 36x + 720$$

5. Resolviendo para x:

$$40x - 36x = 720 - 540$$

$$4x = 180$$

$$x = 45$$

SOLUCIÓN:

Ancho: 45 metros

Largo: 85 metros

Academia



Pyro

Ejercicio 30

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales:

a)
$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 2x + 3y^2 = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 5; y_1 = -2 \\ x_2 = \frac{17}{6}; y_2 = \frac{7}{3} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + 5y = -8 \\ xy - 3x = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1; y_1 = -2 \\ x_2 = -\frac{25}{2}; y_2 = \frac{17}{5} \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ xy = 1 \end{cases}$$

∅ solución.

d)
$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 32 \\ -3x^2 + 4y^2 = 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 4; y_1 = 0 \\ x_2 = -4; y_2 = 0 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x^2 - 2(x - y)^2 = 36 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{162}{23}; y_1 = \frac{102}{23} \\ x_2 = 6; y_2 = 6 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} \sqrt{3(x + y)} + x = 12 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2; y_1 = -1 \\ x_2 = 3; y_2 = 1 \end{cases}$$