

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS

TEMA 2

EXPRESIONES ALGEBRAICAS. MONOMIOS.
OPERACIONES CON MONOMIOS.

TEMA 3

POLINOMIOS. SUMA, PRODUCTO Y
COCIENTE DE UN POLINOMIO. TEOREMA
DEL RESTO. REGLA DE RUFFINI. IDENTIDADES
NOTABLES. FACTORIZACIÓN DE UN
POLINOMIO. TRIÁNGULO DE TARTAGLIA.



“La matemática es la reina de las ciencias y la aritmética es la reina de las matemáticas. Ella a menudo se digna a prestar un servicio a la astronomía y a otras ciencias naturales, pero en todas las relaciones, tiene derecho a la primera fila.”

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Ejercicio 1

Expresa en lenguaje algebraico cada uno de los siguientes enunciados:

- a) El 30% de un número.

$$0,3x$$

- b) El área de un rectángulo de base 3 cm y altura desconocida.

$$3x$$

- c) El perímetro de un rectángulo de base 3 cm y altura desconocida.

$$6 + 2x$$

- d) El doble del resultado de sumarle a un número entero su siguiente.

$$2[x + (x + 1)] = 2(2x + 1) = 4x + 2$$

- e) El triple del resultado de sumar un número con su inverso.

$$3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 3x + \frac{3}{x}$$

- f) El doble de la edad que tendré dentro de cinco años.

$$2(x + 5) = 2x + 10$$

- g) El quíntuplo del área de un cuadrado de lado x.

$$5x^2$$

- h) El área de un triángulo del que se sabe que su base es la mitad de su altura.

$$\frac{x \cdot \frac{x}{2}}{2} = \frac{x^2}{4}$$

- i) La mitad del resultado de sumarle 3 a un número.

$$\frac{x + 3}{2}$$

- j) La tercera parte del área de un rectángulo en el que la base mide el doble que la altura.

$$\frac{2x \cdot x}{3} = \frac{2x^2}{3}$$

Ejercicio 2

Expresa en lenguaje algebraico cada uno de los siguientes enunciados:

- a) La media de un número y su cuádruplo.

$$\frac{x + 4x}{2} = \frac{5x}{2}$$

- b) La cuarta parte de un número entero más el cuadrado de su siguiente.

$$\frac{x}{4} + (x + 1)^2$$

- c) El perímetro de un triángulo isósceles del que sabemos que su lado desigual mide 4 cm menos que cada uno de los dos lados iguales.

$$2x + (x - 4) = 3x - 4$$

- d) La diagonal de un cuadrado de lado x.

$$\sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$$

- e) El doble de la edad que tenía hace 7 años.

$$2(x - 7) = 2x - 14$$

- f) La suma de un número con el doble de otro.

$$x + 2y$$

- g) El precio de una camisa rebajado en un 20%.

$$0,8x$$

- h) El área de un círculo de radio x.

$$\pi x^2$$

- i) La suma de tres números enteros consecutivos.

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 3x + 3$$

- j) El cuadrado de la suma de dos números enteros consecutivos.

$$[x + (x + 1)]^2 = (2x + 1)^2$$

Ejercicio 3

Completa esta tabla:

POLINOMIO	GRADO	Nº DE TÉRMINOS	VARIABLE/S
$3x^4 + 2x - 1$	4	3	x
$2x^3y^2 + 3$	5	2	x, y
$\frac{x^3}{2} + 5x$	3	2	x
$\frac{3}{4}x^2 + 2x - 7$	2	3	x

Academia



Pyro

Ejercicio 4

Indica cuáles de las siguientes igualdades son identidades y cuáles son ecuaciones. Razona tu respuesta:

a) $2x + 8x = 10x$

Es una identidad, pues es cierta para cualquier valor de x .

b) $2x + 8x = 10$

Es una ecuación, solo cierta para $x=1$.

c) $3(x - 1) = 12$

Es una ecuación, solo cierta para $x=5$.

d) $3(x - 1) = 3x - 3$

Es una identidad, es cierta para cualquier valor de x .

e) $2(x + 1) = 2x + 2$

Es una identidad, es cierta para cualquier valor de x .

f) $(x + 1) = 8$

Es una ecuación, solo cierta para $x=7$.

g) $2x + 2$

Es un polinomio (no una igualdad).

h) $x^4 - 3x^2 + 5x - 1 = 0$

Es una ecuación, pues es una igualdad algebraica que no es cierta para cualquier valor de x .

Ejercicio 5

Reduce las siguientes expresiones:

$$\text{a) } \frac{3+x}{2} + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{6}(2x-3)$$

$$\frac{3x+10}{6} = \frac{3x}{6} + \frac{10}{6} = \frac{x}{2} + \frac{5}{3}$$

$$\text{b) } (3x^2 - 5x + 1)(2x + 2)$$

$$6x^3 - 4x^2 - 8x + 2$$

$$\text{c) } (3x^2 - 2x + 1)(-2x + 3)$$

$$-6x^3 + 13x^2 - 8x + 3$$

$$\text{d) } \frac{3}{4}(x-2) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{10x}{12} - \frac{15}{12} = \frac{5x}{6} - \frac{5}{4}$$

Ejercicio 6

Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{3x^2-6x}{9x^2+15}$

$$\frac{x^2 - 2x}{3x^2 + 5}$$

b) $\frac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2}$

$$\frac{a - 5}{7a + 4}$$

c) $\frac{x^2y+3xy^2}{4xy}$

$$\frac{x + 3y}{4}$$

d) $\frac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab}$

$$\frac{2ab + 3}{(a + 1)(a - 1)}$$

Ejercicio 7

Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(2x - 5y)^2$

$$4x^2 - 20xy + 25y^2$$

b) $\left(3x + \frac{y}{3}\right)^2$

$$9x^2 + 2xy + \frac{y^2}{9}$$

c) $\left(5x^2 - \frac{5}{x}\right)^2$

$$25x^4 - 50x + \frac{25}{x^2}$$

d) $(3a - b)^2$

$$9a^2 - 6ab + b^2$$

e) $(a^2 + b^2)^2$

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4$$

f) $\left(\frac{3}{5}y - \frac{2}{y}\right)^2$

$$\frac{9}{25y^2} - \frac{12}{5y^2} + \frac{4}{y^2}$$

g) $(x - 3) \cdot (x + 3)$

$$x^2 - 9$$

h) $(y - 5) \cdot (y + 5)$

$$y^2 - 25$$

i) $(3 - 5i) \cdot (3 + 5i)$

$$9 + 25 = 34$$

(aquí hemos multiplicado por el conjugado y vemos como queda un resultado sin la i de los complejos)

j) $(5i + 2) \cdot (5i - 5)$

$$-35 - 15i$$

(aquí vemos que si no le cambiamos el signo a la parte imaginaria la multiplicación no nos elimina la i de los complejos que es lo que buscamos al multiplicar por el conjugado)

Ejercicio 8

Desarrolla y reduce las siguientes expresiones:

a) $(x + 5)^2 - (x - 5)^2$

20x

b) $(2x + 3)(2x - 3) - 2(2x^2 - 1)$

-7

c) $(x + 6)(x - 6) - (x - 6)^2$

12x - 72

d) $(3x + 1)^2 - 3x(x + 2)$

6x² + 1

e) $(2x - 5)^2$

4x² - 20x + 25

f) $x(3x - 2) - (3x + 2)(3x - 2)$

-6x² - 2x + 4

g) $(5x - 1)^2 - (5x + 1)(5x - 1)$

- 10x + 2

h) $(x + 7)^2 - x(x + 14)$

49

Ejercicio 9

Expresa como cuadrado de un binomio o como producto de una suma por una diferencia:

a) $4x^2 - \frac{1}{36}$

$$\left(2x - \frac{1}{6}\right)\left(2x + \frac{1}{6}\right)$$

b) $36x^2 + 36x + 9$

$$(6x + 3)^2$$

c) $9x^2 - 42x + 49$

$$(3x - 7)^2$$

d) $\frac{9x^2}{4} - 25$

$$\left(\frac{3}{2}x - 5\right)^2 \left(\frac{3}{2}x + 5\right)^2$$

e) $a^4 + 6a^2 + 9$

$$(a^2 + 3)^2$$

f) $9x^2 - 6x + 1$

$$(3x - 1)^2$$

g) $b^2 - 10b + 25$

$$(b - 5)^2$$

h) $4y^2 + 12y + 9$

$$(2y + 3)^2$$

i) $a^4 - 2a^2 + 1$

$$(a^2 - 1)^2$$

j) $y^4 + 6y^2 + 9$

$$(y^2 + 3)^2$$

Ejercicio 10

Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

a) $(-4x^3 + 2x) - (-3x^2)$

$$-4x^3 + 3x^2 + 2x$$

b) $(2x^4 + x) - (-3x^2)$

$$2x^4 + 4x + 4$$

c) $(3x^2 - x) - (2x^3 + x^2 - x)$

$$-2x^3 + 2x^2$$

d) $x^2 \cdot (-5x^4 - 3x^2 + 1) \cdot 2x^3$

$$-10x^9 - 6x^7 + 2x^5 = 2x^5(-5x^4 - 3x^2 + 1)$$

e) $(2x^2 - 3) \cdot (-3x^2 - 5x + 4) \cdot (-x)$

$$6x^5 + 10x^4 - 17x^3 - 15x^2 + 12x$$

Ejercicio 11

Divide los siguientes polinomios:

a) $2x^4 - x^2 - x + 7$ entre $x^2 + 2x + 4$

Cociente = $2x^2 - 4x - 1$

Resto = $17x + 11$

b) $-10x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ entre $5x^3 - x^2 - x + 3$

Cociente = -2

Resto = $-4x^2 + x + 10$

c) $4x^5 - 6x^3 + 6x^2 - 3x - 7$ entre $2x^3 + x + 3$

Cociente = $-2x^2 + 2$

Resto = $12x^2 - 5x - 13$

d) $-8x^5 - 2x^4 + 10x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ entre $4x^3 + x^2 + x - 1$

Cociente = $-2x^2 + 3$

Resto = $-3x^2 + 8$

e) $-6x^5 + x^2 + 1$ entre $x^3 + 1$

Cociente = $-6x^2$

Resto = $7x^2 + 1$

Ejercicio 12

Resuelve las siguientes divisiones de polinomios:

$$\text{a) } x^3 - 2x^2 + 1 \overline{) x - 1}$$
$$x^2 - x - 1$$

$$\text{b) } 2x^2 + 4x + 2 \overline{) 2x + 1}$$
$$x + \frac{3}{2}$$

$$\text{c) } 3x^4 + 6x^2 + 3 \overline{) 3x^2 + 1}$$
$$x^2 + \frac{5}{3}$$

$$\text{d) } 3x^3 - 6x - 2 \overline{) 2x - 3}$$
$$\frac{3x^2}{2} + \frac{9x}{4} + \frac{3}{8}$$

Ejercicio 13

Para cada uno de los siguientes polinomios señala, en primer lugar, qué números enteros son candidatos a ser raíces tuyas y, después, determina cuáles lo son:

a) $x^3 - x^2 + 2x - 2$

Candidatos a raíz: 1, -1, 2, -2

Raíces: 1

b) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$

Candidatos a raíz: -1, -3

Raíces: -1, -3

c) $2x^3 + x^2 - 18x - 9$

Candidatos a raíz: 1, -1, 3, -3, 9, -9

Raíces: 3, -3

d) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x$

Candidatos a raíz: -1, -2, -3, -6

Raíces: 0, -2

Ejercicio 14

Determina las raíces de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $x + 5$

$$x = -5$$

b) $-x + 3$

$$x = 3$$

c) $7x - 5$

$$x = \frac{5}{7}$$

d) $-3x - 11$

$$x = -\frac{11}{3}$$

e) $-7x$

$$x = 0$$

f) $x^2 - 8x$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 8$$

g) $4x^2 - x - 3$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -\frac{3}{4}$$

h) $x^3 - 4x$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -2$$

$$x_3 = 2$$

i) $x^3 + 25x$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 5i$$

$$x_3 = -5i$$

Ejercicio 15

Resuelve por Ruffini:

a) $3x^5 - 4x^4 - 6x^2 - 7x : (x + 2)$

	3	-4	0	-6	-7	0
-2		-6	20	-40	+92	-170
	3	-10	20	-46	85	-170

$$C(x) = 3x^4 - 10x^3 + 20x^2 - 46x + 85$$

$$R(x) = -170$$

b) $\left(-\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - \frac{3}{2}\right) : (x + 3)$

	-1/2	2	0	-3/2
-3		3/2	-21/2	63/2
	-1/2	7/2	-21/2	60/2

$$C(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{21}{2}$$

$$R(x) = 30$$

c) $(x^6 - 3) : (x - 2)$

	1	0	0	0	0	0	-3
2		2	4	8	16	32	64
	1	2	4	8	16	32	61

$$C(x) = x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32$$

$$R(x) = 61$$

Ejercicio 16

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^4 - 2x^2 - 1$

$(x - 1)^2 \cdot (x + 1)^2$

b) $x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 3x + 4$

$(x - 1)^2 \cdot (x + 1) \cdot (x + 4)$

c) $x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 14x - 5$

$(x - 1)^3 \cdot (x + 5)$

d) $x^5 + 6x^4 + 5x^3 - 24x^2 - 36x$

$x \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)^2$

Academia



Pyro

Ejercicio 17

Resuelve:

a) $x^3 - 3x + 2 = 0$

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -2$$

b) $x^4 + x^3 - 19x^2 - 49x - 30 = 0$

$$x^4 + x^3 - 19x^2 - 49x - 30 = (x - 5) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 5, x_2 = -1, x_3 = -2, x_4 = -3$$

c) $x^6 + 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 0$

$$x^6 + 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 4x^2 = x^2 \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 2)^2$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = -2, x_6 = -2$$

Academia



Pyro

Ejercicio 18

a) Determina el valor m para que la división $(2x^3 - 4x^2 + x + m) : (x + 2)$ sea exacta.

$$m = 34$$

b) Determina el valor m para que la división $(x^3 + mx + 3) : (x - 2)$ sea exacta.

$$m = -\frac{11}{2}$$

c) Determina el valor m para que la división $(x^3 + mx^2 + 2x + 3) : (x - 1)$ tenga por residuo -7 .

$$m = -13$$

d) Determina m sabiendo que $x=3$ es una raíz del polinomio $P(x)=x^4 - 3x^3 + mx + 1$.

$$m = -\frac{1}{3}$$

e) Calcula el valor de a para que $x - 1$ sea divisor de $2x^3 - x^2 + 3x + a$:

$$a = -4$$

f) Determina el valor de t para que la división $(3x^3 + 5x^2 + t \cdot x - 5) : (x - 2)$ tenga el mismo resto que la división $(x^3 - 4x^2 + 4x + 9) : (x + 4)$:

$$t = -87$$

Ejercicio 19

- a) Divide el polinomio $5x^4 - 14 + 5x + x^3$ entre $x^2 - 3$ indicando el cociente y el resto. Aplica la regla de la división para comprobar que los cálculos del apartado anterior están bien realizados.

$$\text{Cociente} = 5x^2 + x + 15$$

$$\text{Resto} = 8x + 31$$

Regla de la división: (Cociente · Divisor) + Resto = Dividendo

$$(5x^2 + x + 15) \cdot (x - 5) = 5x^4 + x^3 - 3x - 45$$

$$(5x^4 + x^3 - 3x - 45) + (8x + 31) = 5x^4 + x^3 + 5x - 14$$

- b) Halla el valor de m para que la división $(x^3 + mx^2 + 2x - 10) : (x - 5)$ sea exacta.

- b.1) Aplicando el teorema del resto.

Evalúo el polinomio $p(x) = x^3 + mx^2 + 2x - 10$ sabiendo que debe dar 0 para que se cumpla el teorema del resto:

$$p(5) = 125 + 25m + 10 - 10 = 0 \rightarrow m = -5$$

- b.2) Aplicando la técnica de Ruffini.

		1	m	2	-10
			5	5m+25	25m+135
5		1	m+5	5m+27	25m+125

$$125 + 25m = 0 \rightarrow m = -5$$

Con ambos métodos da el mismo valor de m .

Ejercicio 20

Desarrolla:

a) $(a + b)^6$

$$a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

b) $(2x - 3y)^4$

$$16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4$$

c) $(5 - z)^5$

$$-z^5 + 25z^4 - 250z^3 + 1250z^2 - 3125z + 3125$$

