SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS

TEMA 1

NÚMEROS REALES. NÚMEROS IMAGINARIOS. POTENCIAS. RADICALES.



"Mejor que de nuestro juicio, debemos fiarnos del cálculo algebraico."

Leonhard Euler (1707-1783)

- a) Escribe tres números reales que estén entre $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y 1.
- b) Escribe cinco números racionales que estén entre $\sqrt{2}$ y 1,5.
- c) Escribe cinco números irracionales que estén entre 3,14 y π .
 - a) Por ejemplo:

-0,5

0

0,2

b) Por ejemplo:

143

 $\overline{100}$

144

 $\overline{100}$

145

100

145555

100000

143456767

100000000

c) Sabiendo que π = 3,141592653589793238462..., podríamos escribir:

3,1405

3,1406

3,14158

3,141592652

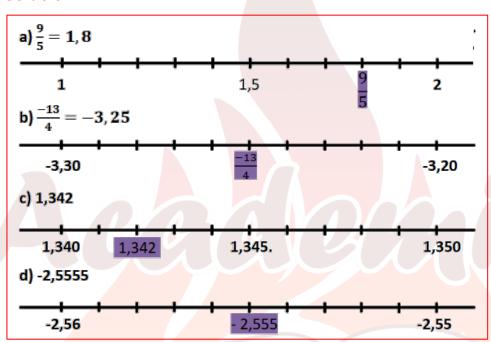
 $\pi - 0.000002$

1. Representa en la recta numérica los siguientes números:

$$\frac{9}{5}$$

$$\frac{-13}{4}$$

Solución:



2. Representa en la recta numérica los siguientes números:

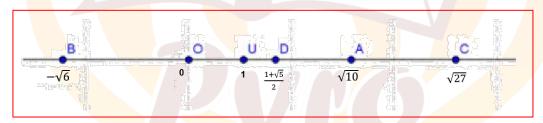
$$\sqrt{10}$$

$$-\sqrt{6}$$

$$\sqrt{27}$$

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Solución:



Representa en la recta real y calcula la distancia entre los números reales siguientes:

- a) Distancia (5, 9)
- b) Distancia(-2'3, -4,5)
- c) Distancia (-1/5, 9/5)
- d) Distancia(-3'272727..., 6'272727...)

Solución:

a) Distancia = 4



b) Distancia = 2,2



c) Distancia = 2



d) Distancia = 9,54



- 1. Escribe los siguientes intervalos mediante conjuntos y represéntalos en la recta real:
 - a) [1, 7)

 $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x < 7\}$

b) (-3, 5)

 $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 5\}$



c) (2, 8]

 ${x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \le 8}$



d) $(-\infty, 6)$

 $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 6\}$

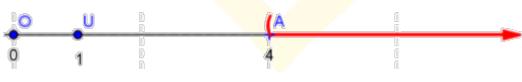


- 2. Representa en la recta real y escribe en forma de intervalo:
 - a) 2 < x < 5

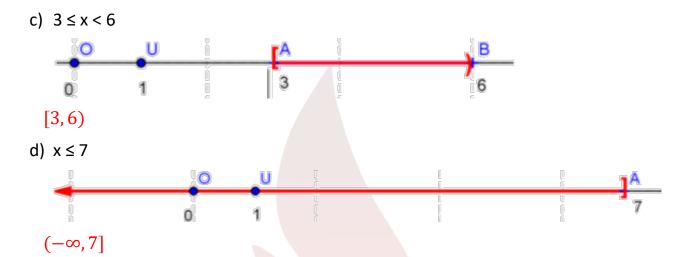


(2,5)

b) 4 < x



 $(4, +\infty)$



- 3. Expresa como intervalo o semirrecta, en forma de conjunto (usando desigualdades) y representa gráficamente:
 - a) Un porcentaje superior al 26%.

$$(26, 100] = \{x \in \mathbb{R}: 26 < x \le 100\}$$

b) Edad inferior o igual a 18 años.

$$[0, 18] = \{x \in \mathbb{R}: 0 \le x \le 18\}$$

c) Números cuyo cubo sea superior a 8.

$$(2, \infty) = \{x \in \mathbb{R}: x > 2\}$$

d) Números positivos cuya parte entera tiene 3 cifras.

$$[100, 1000] = \{x \in \mathbb{R}: 100 \le x < 1000\}$$

e) Temperatura inferior a 25°C.

$$[-273'15, 25) = \{x \in \mathbb{R}: -273'15 \le x < 25\}$$

f) Números para los que existe su raíz cuadrada (es número real).

$$[0,\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x \ge 0\}$$

g) Números que estén de 5 a una distancia inferior a 4.

$$(1,9) = \{ x \in \mathbb{R} : 1 < x < 9 \}$$

Para la representación gráfica: círculos abiertos en paréntesis y cerrados en corchetes sobre la recta real en cada extremo indicado.

- a) Escribe estos números en notación científica:
 - a. 13800000

$$1,38 \cdot 10^7$$

b. 0,000005

$$5 \cdot 10^{-6}$$

c. 4800000000

$$4.8 \cdot 10^9$$

d. 0,0000173

$$1.73 \cdot 10^{-5}$$

b) Calcula y expresa el resultado en notación científica:

a.
$$(5.81 \cdot 10^{-12}) \cdot (4.79 \cdot 10^9) + 7.23 \cdot 10^{-4}$$

$$2,85529 \cdot 10^{-2}$$

b.
$$(5,44 \cdot 10^{-7}) \cdot (2,5 \cdot 10^7) + 3,1 \cdot 10^{10}$$

$$13,6 + 3,1 \cdot 10^{10} = 3,10000000136 \cdot 10^{10}$$

Realiza las siguientes operaciones con números complejos:

a)
$$\frac{68}{(1-i)\cdot(2-i)\cdot(3-i)}$$

Paso 1: Calcular el denominador

Primero, resolvemos el producto de los términos en el denominador.

Multiplicamos (1 - i) y (2 - i):

$$(1-i)(2-i) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-i) + (-i) \cdot 2 + (-i) \cdot (-i) = 2 - i - 2i + i^2$$

= 2 - 3i - 1 (ya que i² = -1) = 1 - 3i

Multiplicamos (1 - 3i) por (3 - i):

$$(1-3i)(3-i) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-i) + (-3i)3 + (-3i) \cdot (-i) = 3-i-9i+3i^2$$

= 3-i-9i-3 = -10i

Por lo tanto, el denominador es -10i.

Paso 2: Calcular el cociente

Ahora resolvemos la fracción:

$$\frac{68}{-10i}$$

Multiplicamos numerador y denominador por -i:

$$\left(\frac{68}{-10i}\right) \cdot \left(\frac{-i}{-i}\right) = \frac{-68i}{10 \cdot i^2} = \frac{-68i}{10 \cdot (-1)} = \frac{34i}{5}$$

Respuesta final

$$\frac{34i}{5}$$

b)
$$(2 + i) - i(1 - 2i)$$

0

c)
$$\frac{2+i}{4-3i} + \frac{3+i}{5i}$$

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$$

d)
$$(3-2i) \cdot (3+2i)$$

13

Calcula (sustituye z por x+iy):

a) Im $\frac{\overline{z}}{z}$

$$-\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

b) Re (z⁴)

$$x^4 - 6x^2y^2 + y^4$$

- c) $(Re(z))^4$
 - x^4

- 1. Calcula el módulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:
 - a) $\sqrt{3} i$

$$|z| = 2$$
; $\theta_{principal} = 330^{\circ}$

b) $1 - \sqrt{3}i$

$$|z| = 2$$
; $\theta_{principal} = 300^{\circ}$

c) -2 - 2i

$$|z| = 2\sqrt{2}$$
; $\theta_{principal} = 225^{\circ}$

d) -4i

$$|z| = 4$$
; $\theta_{principal} = 270^{\circ}$

- 2. Expresa en forma polar los siguientes números complejos:
 - a) i

$$z = 1(\cos 90 + i \sin 90)$$

b) -i

$$z = 1(\cos 270 + i \sin 270)$$

c) $\frac{4 + 4i}{100}$

$$z = 4\sqrt{2}(\cos 45 + i\sin 45)$$

d) -4

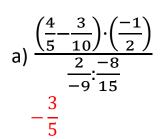
$$z = 4(\cos 180 + i \sin 180)$$

Dados los complejos $z_1=3-4i$ y $z_2=4+3i$ realiza las siguientes operaciones expresando el resultado en forma binómica:

Acceso a Grado Superior Navarra 2015

- a) $z_1 z_2$
- -1 7i
- b) $z_1 \cdot z_2$
 - 24 7i
- c) $\frac{z_1}{z_2}$
 - -i
- d) $(z_2)^3$
 - -44 + 117i

Realiza las siguientes operaciones:



b)
$$\frac{\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\right] + \frac{1}{2}}{\left(3 - \frac{1}{2}\right) : \frac{5}{3}}$$

 $\frac{27}{4}$

Simplifica escribiendo en forma de una sola potencia:

a)
$$7^8 \cdot 7^{-3} = 7^5$$

b)
$$5^{-2} \cdot 5 = 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

c)
$$(-8)^{-4} \cdot (-8)^{-2} \cdot (-8)^5 = -8^{-1} = -\frac{1}{8}$$

d)
$$7^6 \cdot 7^{-4} \cdot 7^{-1} = 7$$

e)
$$9^3:9^7=9^{-4}=\frac{1}{9^4}$$

f)
$$3^{-5}$$
: $3^4 = 3^{-9} = \frac{1}{3^9}$

g)
$$(8^{-5})^2 = 8^{-10} = \frac{1}{8^{10}}$$

h)
$$((-6)^3)^{-4} = (-6)^{-12} = \frac{1}{6^{12}}$$

i)
$$5^6 \cdot 4^6 = 20^6$$

j)
$$5^{-5} \cdot 4^{-5} \cdot 3^{-5} = 60^{-5} = \frac{1}{60^5}$$

k)
$$21^{-3}$$
: $7^{-3} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3}$

1)
$$3^{-3} \cdot 27^2 \cdot (9^4)^{-5} = 3^{-36}$$

m)
$$8^5 \cdot (2^6)^{-3} \cdot 32 = 2^2$$

n)
$$\frac{3^5 \cdot 3^{-4}}{3^7} = \frac{3^{-6}}{3^6} = \frac{1}{3^6}$$

o)
$$\frac{8^5 \cdot 8^{-2}}{(8^3)^5 \cdot 8} = \frac{8^{-13}}{8^{13}} = \frac{1}{8^{13}}$$

p)
$$\frac{2^3 \cdot 8^{-3}}{(4^{-2})^5} = 2^{14}$$

q)
$$\frac{5^3 \cdot 125^{-3}}{(25^4)^{-5}} = 5^{34}$$

r)
$$(-a)^5 \cdot (-a)^{-3} \cdot a = a^3$$

s)
$$(-2)^4 \cdot 2^3 \cdot (-2)^4 = 2^{11}$$

t)
$$-1^{26} = -1$$

u)
$$(-1)^{568} = 1$$

v)
$$(-1)^{35} = -1$$

w)
$$(-5)^6 \cdot 5^{-2} \cdot 5 \cdot 5^{-3} = 5^2$$

Escribe en una sola potencia de b:

a)
$$b^5 \cdot b^{-4} \cdot b = b^2$$

b)
$$b^6 \cdot (b^{-4})^3 = b^{-6} = \frac{1}{b^6}$$

c)
$$\frac{b^5}{b^{-7}} = b^{12}$$

d)
$$\frac{b^5}{b^{-6}} = b^{11}$$

e)
$$\frac{b^5 \cdot b}{b^{-4}} = b^{10}$$

f)
$$\frac{b^{-3} \cdot (b^4)^{-2}}{b^5 \cdot b} = b^{-17} = \frac{1}{b^{17}}$$

g)
$$b^3 \cdot \left(\frac{1}{b^{-1}}\right)^{-2} = b$$

h)
$$\frac{b^6 \cdot (b^{-3})^{-2}}{(b^{-1})^{-3}} = b^9$$

i)
$$b^{-5} \cdot \frac{b^3}{(b^4)^{-2}} = b^6$$

Calcula dando el resultado con un único radical:

a)
$$\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{15} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} = 3$$

b)
$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{3} = 15$$

c)
$$\sqrt{6} : \sqrt{18} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

d)
$$\sqrt[3]{14} : \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{2}$$

e)
$$\sqrt[3]{15} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[6]{6075}$$

f)
$$\sqrt[3]{15} : \sqrt{3} = \sqrt[6]{\frac{5^2}{3}}$$

g)
$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{7} = \sqrt[6]{1400}$$

h)
$$\sqrt{3a}$$
: $\sqrt[5]{a^3} = \sqrt[10]{\frac{3^5}{a}}$

i)
$$3 \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{3^6}$$

j)
$$\sqrt[3]{4} : 2 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

k)
$$\sqrt[3]{3a^2b} \cdot \sqrt[4]{15ab^3} = \sqrt[12]{3^7 \cdot 5^3 \cdot a^{11} \cdot b}$$

I)
$$\sqrt[3]{3a^2b} : \sqrt[4]{15ab^3} = \sqrt[12]{\frac{3a^5}{5^3 \cdot b^5}}$$

m)
$$\frac{\sqrt[3]{4a}}{4\sqrt{a}} = \sqrt[6]{\frac{1}{4^4 \cdot a}}$$

n)
$$\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2^3 \cdot 5^4}$$

$$0) \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{3}} = \sqrt[6]{\frac{3}{5}}$$

$$p) \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt[5]{4}}{\sqrt[10]{10}} = \sqrt[10]{\frac{7^5 \cdot 4^2}{10}}$$

Calcula las siguientes sumas:

a)
$$5\sqrt{7} - 3\sqrt{7} + 4\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - \sqrt{7} = 7\sqrt{7}$$

b)
$$4\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5} - 7\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5} = 0$$

c)
$$\sqrt{99} + \sqrt{44} = 5\sqrt{11}$$

d)
$$2\sqrt{18} + 5\sqrt{8} - \sqrt{50} = 11\sqrt{2}$$

e)
$$\sqrt[3]{81} + 4 \cdot \sqrt[3]{375} - 3 \cdot \sqrt[3]{24} = 17\sqrt[3]{3}$$

f)
$$\sqrt{6} + 3\sqrt{8} - 4\sqrt{18} + \sqrt{24} - 4\sqrt{2} = 3\sqrt{6} - 10\sqrt{2}$$

g)
$$\sqrt{100x} + 3\sqrt{16x} = 22\sqrt{x}$$

h)
$$\sqrt[3]{54x} - 4\sqrt[3]{16x} + \sqrt[3]{250x} = 0$$

i)
$$2a\sqrt{3} - 3\sqrt{12a^2} - a\sqrt{27} = -7a\sqrt{3}$$

j)
$$\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{10} = \sqrt{3} + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2})\sqrt{5}$$
 (este se puede simplificar poco)

k)
$$\sqrt{50} + \sqrt{75} - \sqrt{18} - \sqrt{12} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$$

Calcula dando el resultado con un único radical:

a)
$$\sqrt[3]{5^7} = 5\sqrt[6]{5}$$

b)
$$\sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt[8]{5}$$

c)
$$\sqrt{7\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3 \cdot 7^2}$$

d)
$$\sqrt[3]{4\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5 \cdot 4^2}$$

e)
$$\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2^2 \cdot \sqrt{2}}} = \sqrt[12]{2^{11}}$$

f)
$$\sqrt{a \cdot \sqrt[5]{2a^2}} = \sqrt[10]{2a^7}$$

$$g) \sqrt[3]{a^2 \sqrt{a}} = \sqrt[6]{a^5}$$

$$h) \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \sqrt[8]{a^7}$$

1. Calcula el volumen, en centímetros cúbicos, de una habitación que tiene 5 m de largo, 4 m de ancho y 2,5 m de alto.

 $50.000.000 \text{ cm}^3$

- 2. Una piscina tiene 8 m de largo, 6 m de ancho y 1.5 m de profundidad. Se pinta la piscina a razón de 6 € el metro cuadrado.
 - a) Cuánto costará pintarla.

540 €.

b) Cuántos litros de agua serán necesarios para llenarla.

72000 litros.

3. En un almacén de dimensiones 5 m de largo, 3 m de ancho y 2 m de alto queremos almacenar cajas de dimensiones 10 dm de largo, 6 dm de ancho y 4 dm de alto. ¿Cuántas cajas podremos almacenar?

125 cajas.

4. Determina el área total de un tetraedro, un octaedro y un icosaedro de 5 cm de arista.

$$A_{\text{tetraedro}} = 25 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{octaedro}} = 50 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$A_{icosaedro} = 125 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

5. Calcula la altura de un prisma que tiene como área de la base 12 dm² y 48 litros de capacidad.

4 decímetros.

6. Calcula la cantidad de hojalata que se necesitará para hacer 10 botes de forma cilíndrica de 10 cm de diámetro y 20 cm de altura.

$$0,7854 \text{ m}^2.$$

- 7. Un cilindro tiene por altura la misma longitud que la circunferencia de la base. Y la altura mide 125,66 cm. Calcular:
 - a. El área total.

7539,83 cm²

b. El volumen.

50265,5 cm³

8. En una probeta de 6 cm de radio se echan cuatro cubitos de hielo de 4 cm de arista. ¿A qué altura llegará el agua cuando se derritan?

El agua subirá aproximadamente 2,26 cm.

9. La cúpula de una catedral tiene forma semiesférica, de radio 50 m. Si restaurarla tiene un coste de 300 € el m², ¿A cuánto ascenderá el presupuesto de la restauración?

4712388 €.

- 10. ¿Cuántas losetas cuadradas de 20 cm de lado se necesitan para recubrir las caras de una piscina de 10 m de largo por 6 m de ancho y de 3 m de profundidad?

 3900 losetas.
- 11. Un recipiente cilíndrico de 10 cm de radio y 5 cm de altura se llena de agua. Si la masa del recipiente lleno es de 2 kg, ¿cuál es la masa del recipiente vacío?

0,43 kg.

12. Para una fiesta, Luis ha hecho 10 gorros de forma cónica con cartón. ¿Cuánto cartón habrá utilizado si las dimensiones del gorro son 15 cm de radio y 25 cm de generatriz?

 $1,1781 \text{ m}^2.$

13. Un cubo de 20 cm de arista está lleno de agua. ¿Cabría esta agua en una esfera de 20 cm de radio?

Como el volumen de la esfera (33510 cm³) es mucho mayor que el del cubo (8000 cm³), por lo que sí que cabe el agua.

14. Calcular la diagonal de un ortoedro de 10 cm de largo, 4 cm de ancho y 5 cm de alto.

$$\sqrt{141} \cong 11,87 \text{ cm}.$$

15. Calcula el área y el volumen de un tetraedro de 5 cm de arista.

$$\frac{125\sqrt{2}}{12} \cong 14,73 \text{ cm}^3$$

16. Calcular la diagonal, el área lateral, el área total y el volumen de un cubo de 5 cm de arista.

Diagonal $\cong 8.66 \text{ cm}$ Área lateral $= 100 \text{ cm}^2$ Área total $= 150 \text{ cm}^2$ Volumen $= 125 \text{ cm}^3$

17. Calcula el área y el volumen de un octaedro de 5 cm de arista.

Área total =
$$50\sqrt{3} \approx 86,60 \text{ cm}^2$$

Volumen = $\frac{176,78}{3} \approx 58,93 \text{ cm}^3$

18. Calcula el área y el volumen de un dodecaedro de 10 cm de arista, sabiendo que la apotema de una de sus caras mide 6,88 cm.

Área total $\cong 2064 \text{ cm}^2$ Volumen $\cong 7656,3 \text{ cm}^3$.

19. Calcula el área y el volumen de un icosaedro de 5 cm de arista.

Área total $\cong 216,51 \text{ cm}^2$ Volumen $\cong 272,71 \text{ cm}^3$

20. Calcula el área lateral, el área total y el volumen de un prisma cuya base es un rombo de diagonales 12 y 18 cm. La altura es de 24 cm.

Área lateral = 1038.72 cm^2 Área total = $1254,72 \text{ cm}^2$ Volumen = 2592 cm^3 21. Calcula el área lateral, total y el volumen de una pirámide cuadrangular de 10 cm de arista básica y 12 cm de altura.

Área lateral = 260 cm^2 Área total = 360 cm^2 Volumen = 400 cm^3

22. Calcula el área lateral, total y el volumen de una pirámide hexagonal de 16 cm de arista básica y 28 cm de arista lateral.

Área lateral = 1287.84 cm^2 Área total = 1952.94 cm^2 Volumen = 5096.97 cm^3

23. Calcular el área lateral, el área total y el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular de aristas básicas 24 y 14 cm, y de arista lateral 13 cm.

Área lateral = 912 cm^2 Área total = 1684 cm^2 Volumen = 4432 cm^3

24. Calcula el área lateral, total y el volumen de un cono cuya generatriz mide 13 cm y el radio de la base es de 5 cm.

Área lateral = 204.2 cm^2 Área total = 282.74 cm^2 Volumen = 314.16 cm^3

25. Calc<mark>ula</mark> el áre<mark>a late</mark>ral, total y el volumen de u<mark>n cono cuya alt</mark>ura m<mark>ide 4</mark> cm y el radio de la base es de 3 cm.

Área lateral = $47,12 \text{ cm}^2$ Área total = $75,40 \text{ cm}^2$ Volumen = $37,70 \text{ cm}^3$

26. Calcular el área lateral, el área total y el volumen de un tronco de cono de radios 6 y 2 cm, y de altura 10 cm.

Área lateral = 270.7 cm^2 Área total = 396.9 cm^2 Volumen = 544.4 cm^3 27. Calcular el área lateral, el área total y el volumen del tronco de cono de radios 12 y 10 cm, y de generatriz 15 cm.

Área lateral =
$$1036,73 \text{ cm}^2$$

Área total = $1802,59 \text{ cm}^2$
Volumen = $5669,28 \text{ cm}^3$

28. Calcular el área del círculo resultante de cortar una esfera de 35 cm de radio mediante un plano cuya distancia al centro de la esfera es de 21 cm.

Área del círculo =
$$2463,01 \text{ cm}^2$$

29. Calcular el área y el volumen de una esfera inscrita en un cilindro de 2 m de altura.

Área =
$$12,57 \text{ m}^2$$

Volumen = $4,19 \text{ m}^3$

30. Calcular el volumen de una semiesfera de 10 cm de radio.

Volumen =
$$2094,4 \text{ cm}^3$$

Resuelve a mano las siguientes raíces cuadradas:

a) $\sqrt{79551}$

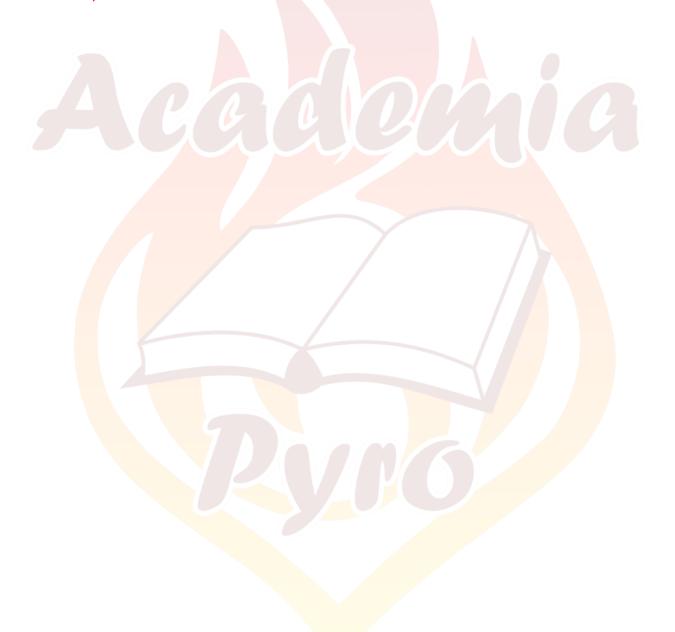
282,10

b) $\sqrt{10827}$

104,05

c) $\sqrt{67802}$

260,39

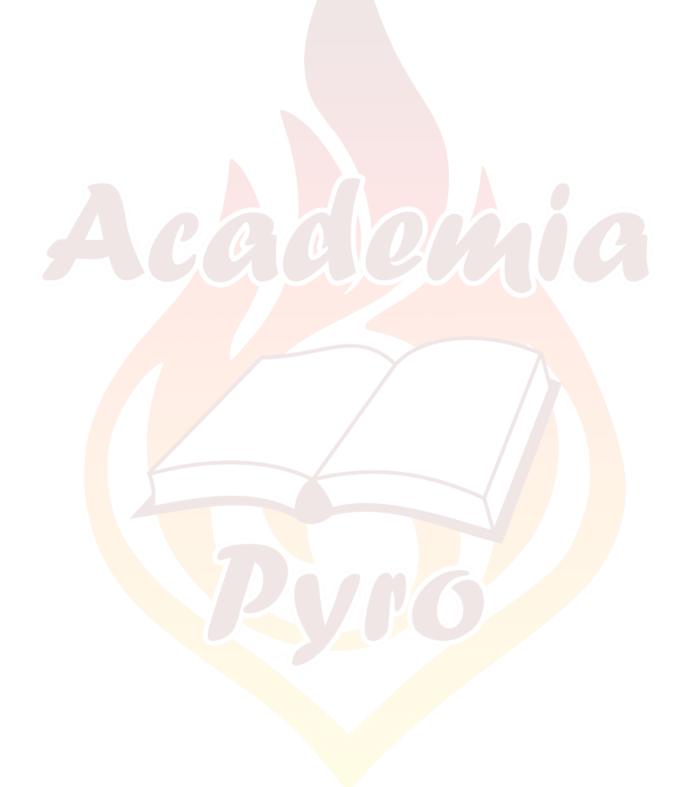


Pasar a forma binómica los siguientes complejos en forma polar:

- a) 2_{30}°
 - $\sqrt{3} + 1$
- b) $4_{0^{\circ}}$
 - 4
- c) 10_{π}
 - -10
- d) $3\frac{3\pi}{2}$
 - -3i

Calcular x para que $\frac{x+9i}{3-i}$ sea un número imaginario puro.

x = 3



a) Expresa el número complejo $z = \sqrt{3} - i$ en su forma polar.

$$z = 2_{\frac{11\pi}{6}}$$

b) Determina en forma binómica y en forma polar el número opuesto y el conjugado de z.

Opuesto:
$$-z = 2\frac{5\pi}{6}$$

Conjugado:
$$\bar{z} = 2\frac{\pi}{6}$$

c) Representa gráficamente los números z, -z y z̄.

$$z = (\sqrt{3}, -1)$$
 en el cuarto cuadrante.

$$-z = (-\sqrt{3}, 1)$$
 en el segundo cuadrante.

$$\overline{z} = (\sqrt{3}, 1)$$
 en el primer cuadrante.