EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS

COLECCIÓN DE REPASO 1

“La constancia obtiene las cosas más difíciles en poco tiempo.”

Benjamin Franklin (1706-1790)

Ejercicio 1

Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:

a) $\frac{1-4i}{3+i}$

$-\frac{1}{10}-\frac{13}{10}i$

b) $\frac{(-3i)^2(1-2i)}{2+2i}$

$\frac{9}{4}+\frac{27}{4}i$

c) $(3+2i)\cdot(4-2i)$

$16+2i$

Ejercicio 2

Expresa en forma binómica:

a) 2_{45°

$\sqrt{2} + \sqrt{2}\mathrm{i}$

b) 17_{0°

17

c) $1_{\frac{\pi}{2}}$

i

d) $3_{\frac{\pi}{6}}$

$\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}$

e) 1_{150°

$-\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$

Ejercicio 3

Escribe estos números complejos en forma polar:

a) $2i$

$2_{90°}$

b) -4

$4_{180°}$

c) $2+2\sqrt{3}i$

$4_{60°}$

d) $1-i$

$\sqrt{2}_{135°}$

Ejercicio 4

Halla el valor de w para que el producto $(2-5\mathrm{i})\cdot(3+\mathrm{wi})$ sea:

a) Un número imaginario puro.

$$\mathrm{w}=-\frac{6}{5}$$

b) Un número real.

$$\mathrm{w}=-\frac{15}{2}$$

Ejercicio 5

Determina los valores de a y b que satisfacen la ecuación $(a + bi)^2 = 3 + 4i$.

$a = -2 \rightarrow b = -1$

$a = 2 \rightarrow b = 1$

Ejercicio 6

a) Halla m para que el resto de la división $-4x^3+3x^2-mx+1:(x+3)$ sea 1.

$m=-45$

b) Determinar a para que 3 sea raíz del polinomio $Q(x)=x^3-6x^2+ax-2$.

$a=\frac{29}{3}$

c) Calcula el valor de k para que al dividir $x^2-\frac{2}{3}x+k$ entre $x-\frac{1}{3}$ se obtenga el resto $\frac{8}{9}$.

$k=1$

d) ¿Qué valor hay que dar a n para que el polinomio $x^3-6x^2+2nx-1$ sea divisible por $x-6$?

$n=\frac{1}{12}$

Ejercicio 7

Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones, aplicando la regla de Ruffini:

a) $(2x^3 - 4x^2 + x - 1) : (x - 1)$

$C(x) = 2x^2 - 2x - 1$

$R = -2$

b) $(x^5 + 24x^4 - x^2 + 1) : (x - 3)$

$C(x) = x^4 + 27x^3 + 81x^2 + 242x + 726$

$R = 2179$

c) $(x^8 - 16) : (x + 2)$

$C(x) = x^7 - 2x^6 + 4x^5 - 8x^4 + 16x^3 - 32x^2 + 64x - 128$

$R = 240$

d) $(x^4 - 4x^3 + x - 2) : (x + 2)$

$C(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 23$

$R = 44$

Ejercicio 8

Realiza la división de $P(x) = 4x^3 + 12x^2 + 5x - 6$ entre $2x - 3$ y entre $x - 2$ y comprueba el resultado con la prueba de la división.

Entre $2x - 3$:

$$(2x^2 + 3x - 2) \cdot (2x - 3) + 0 = 4x^3 + 12x^2 + 5x - 6$$

Entre $x - 2$:

$$(4x^2 + 20x + 45) \cdot (x - 2) + 84 = 4x^3 + 12x^2 + 5x - 6$$

Ejercicio 9

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$

$x_1 = 2$

$x_2 = 1$

$x_3 = \frac{1}{2}$

b) $2x^3 - 5x^2 - 3x = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = -\frac{1}{2}$

$x_3 = 3$

c) $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$

$x_1 = 5$

$x_2 = 2$

$x_3 = -1$

Ejercicio 10

Factoriza e indica las raíces de cada polinomio:

a) $3x^4 + 15x^2$

$3x^2 \cdot (x^2 + 5)$

Raíces: 0 y -5.

b) $x^4 - x^3 - 9x^2 + 3x + 18$

$(x + 2) \cdot (x - 3) \cdot \left(x - \sqrt{3}\right) \cdot (x + \sqrt{3})$

Raíces: $-2, 3, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$

c) $x^3 - x^2 + 9x - 9$

$(x - 1) \cdot (x^2 + 9)$

$\text{Raíces} = 1$

d) $x^4 + 9x^3 - 10x^2$

$x^2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 10)$

$\text{Raíces} = 0, 1, -10$

e) $2x^2 - 9x - 5$

$2(x - 5) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$

$\text{Raíces} = 5, -\frac{1}{2}$

Ejercicio 11

En un parque de bomberos se disponen de dos tipos de mangueras para apagar incendios: mangueras del tipo A y mangueras del tipo B. El caudal de ambas mangueras es diferente, pero el producto de sus caudales es de 1200 litros por hora. Además, se sabe que el caudal de la manguera A es un tercio de la capacidad de la manguera B. ¿Cuáles son los caudales de las mangueras?

El caudal de la manguera A es de 20 litros por hora y el de la manguera B de 60 litros por hora

Ejercicio 12

Tras un incendio en un edificio en ruinas, un equipo de bomberos necesita reforzar la estructura para evitar derrumbes peligrosos. Para ello, disponen de un gran panel de madera de 15 m², del cual cortarán dos refuerzos cuadrados. Uno de los refuerzos tendrá un lado 1 metro más largo que el otro. Después de realizar los cortes, quedan 2 m² de madera sobrante. ¿Cuánto miden los lados de los refuerzos cuadrados utilizados para apear el edificio?

El refuerzo más pequeño mide 2 metros y el refuerzo más grande 3 metros.

Ejercicio 13

En un parque de bomberos, dos mangueras con diferentes caudales se usan para llenar un tanque de agua. La suma de tres veces el inverso del caudal de la primera manguera y una vez el inverso del caudal de la segunda manguera es igual a 3/2. Se observa asimismo que la suma de cuatro veces el inverso del caudal de la primera manguera y cuatro veces el inverso del caudal de la segunda manguera es igual a 10/3. ¿Cuál es el caudal de cada manguera teniendo en cuenta que todas las mediciones que se han hecho han sido tomadas el litros por minuto?

Los caudales de las mangueras son de 3 litros por minuto y 2 litros por minuto.

Ejercicio 14

Durante un operativo especial, dos helicópteros de rescate están monitoreando un incendio en una zona forestal. Cada helicóptero vuela a una altura diferente para obtener mejores ángulos de observación y optimizar la coordinación con las brigadas en tierra. Si elevamos al cuadrado la altura de vuelo de cada helicóptero (en metros) y luego la dividimos por 5, la suma de estos valores es igual a 53. Además, el producto de los inversos de ambas alturas, multiplicado por 132, da como resultado 1. Determina la altura de cada helicóptero.

Los helicópteros vuelan a 11 metros y 12 metros de altura, respectivamente.

Ejercicio 15

Durante unas maniobras de prácticas, los bomberos practican el uso de una escalera extensible para rescatar a personas atrapadas en un edificio. La escalera se apoya en el suelo y se extiende hasta una ventana. El área del triángulo rectángulo formado por la escalera, la pared y el suelo es de 60 m^2 y la longitud de la escalera desplegada hasta la ventana es de 17 metros. Determina la distancia de la base de la escalera a la fachada del edificio y la altura a la que está la ventana sabiendo que la ventana está a mayor altura que la distancia de la fachada a la base de la escalera.

La distancia del camión a la fachada del edificio es de 8 metros mientras que la altura de la ventana es de 15 metros.

Ejercicio 16

Un rocódromo ofrece un descuento para los bomberos para el uso de sus instalaciones. El descuento implica que pueden pagar una tarifa fija de 36 euros al mes, lo que les da acceso ilimitado a las instalaciones. Por otro lado, si no se suscriben, tienen que pagar 4,50 euros por cada hora de entrenamiento. ¿Cuántas horas al mes debe entrenar un bombero para que le resulte más rentable pagar la tarifa mensual en lugar de la tarifa por horas?

Un bombero debe entrenar al menos 8 horas al mes para que le resulte más rentable pagar la tarifa mensual de 36 euros en lugar de la tarifa por horas de 4,50 €/h.

Ejercicio 17

Para aprobar las oposiciones a bombero, un candidato debe superar tres pruebas físicas. La calificación final se calcula teniendo en cuenta el peso de cada prueba en la nota total:

- La primera prueba representa el 25% de la nota final.
- La segunda prueba representa el 35% de la nota final.
- La tercera prueba representa el 40% de la nota final.

Un aspirante ha obtenido un 5 en la primera prueba y un 7 en la segunda prueba. ¿Qué nota mínima debe obtener en la tercera prueba para alcanzar una calificación final de al menos 8 y asegurar su plaza en el cuerpo de bomberos?

El aspirante necesitaría obtener una nota de 10,75 en la tercera prueba para alcanzar una calificación final de 8. Dado que la calificación máxima suele ser 10, no sería posible alcanzar el objetivo de 8 con estas notas previas. El aspirante tendría que haber obtenido mejores calificaciones en las primeras pruebas para que fuera viable.

Ejercicio 18

En una academia de bomberos, los aspirantes están en una sesión de formación sobre técnicas de rescate. A los 10 minutos de comenzar la sesión, algunos aspirantes están mirando las demostraciones del instructor, otros están tomando notas y el resto, que equivale a la sexta parte del total, no están prestando atención. Quince minutos después, la situación cambia:

- Tres aspirantes distraídos comienzan a tomar notas.
- Un aspirante que tomaba notas pasa a mirar la demostración.
- Ocho aspirantes que miraban la demostración se distraen.

En este momento, el número de aspirantes en cada grupo es igual: los que miran la demostración, los que toman notas y los distraídos. ¿Cuántos aspirantes hay en total en la sesión de formación?

En la sesión de formación hay 30 aspirantes en total.

Ejercicio 19

a) En una prueba teórica de 20 preguntas para las oposiciones de bombero, los aspirantes reciben 3 puntos por cada respuesta correcta y se les restan 2 puntos por cada error. Mario respondió todas las preguntas y obtuvo un total de 30 puntos. ¿Cuántas preguntas respondió correctamente?

14 preguntas.

b) Si aumentamos en 8 cm el lado de un cuadrado, su perímetro se triplica. ¿Cuánto mide el lado?

4 centímetros.

c) En un entrenamiento de rescate, los bomberos deben marcar dos zonas en el suelo. La primera en forma de triángulo equilátero, donde cada lado mide x metros. La segunda una zona en forma de rectángulo, con un largo de x metros y una altura de 4 metros. Para garantizar el acceso rápido a las áreas de práctica, se necesita que el perímetro del rectángulo sea mayor que el del triángulo. ¿Para qué valores de x se cumple esta condición?

Para los valores de x menores a 8 el perímetro del rectángulo es superior al perímetro del triángulo.

d) Dos compañías eléctricas ofrecen tarifas para el consumo mensual de energía. La tarifa A tiene un costo fijo de 25 euros al mes, más un cargo adicional de 0,10 euros por cada kWh consumido. La tarifa B tiene un costo fijo de 20 euros al mes, pero con un cargo adicional de 0,20 euros por cada kWh consumido. ¿A partir de cuántos kWh consumidos en un mes resulta más económica la tarifa A en comparación con la Tarifa B?

A partir de 50 kWh.

Ejercicio 20

En una academia de bomberos, los aspirantes se dividen en tres grupos según el color de sus cascos: azules, negros y marrones. El número de aspirantes con casco azul, aumentado en 5, equivale a la sexta parte del total de aspirantes con casco negro o marrón. El número de aspirantes con casco negro, disminuido en 75, equivale a la mitad de los aspirantes con casco azul o marrón. El número de aspirantes con casco marrón, aumentado en 50, es igual al total de aspirantes con casco azul o negro. ¿Cuántos aspirantes hay en total en la academia?

Hay 870 aspirantes.

Ejercicio 21

a) ¿Qué representa el discriminante en una ecuación cuadrática? ¿Qué información nos da sobre las soluciones? Sin resolver la ecuación, explica por qué la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ no tiene soluciones reales.

El discriminante se representa con la letra griega Δ y se calcula así:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Según el valor del discriminante:

- Si Δ>0, hay dos soluciones reales distintas.
- Si Δ=0, hay una única solución real (raíz doble).
- Si Δ<0, no hay soluciones reales, solo complejas.

Aplicamos esto a la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$, donde a=1, b=1, c=1:

$$\Delta = 1^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3$$

Como el discriminante es negativo, la ecuación no tiene soluciones reales.

b) Estudia para qué valores del parámetro m la ecuación $4x^2 - 6x + m = 0$ presenta una única solución.

$$m = \frac{9}{4}$$

c) Analiza qué valores puede tomar b para que la ecuación $2x^2 - 3bx + 16 = 0$ tenga exactamente una solución real.

$$b = \pm\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

d) Halla las soluciones reales y descompón en factores la siguiente ecuación: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

$$x_1 = 2;\ \ x_2 = -2;\ \ x_3 = 3;\ \ x_4 = -3$$

$$x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 9)\cdot(x^2 - 4) = (x-3)\cdot(x+3)\cdot(x-2)\cdot(x+2)$$

e) Resuelve la siguiente ecuación: $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0$

$$x_1 = 1;\ \ x_2 = -1;\ \ x_3 = 2;\ \ x_4 = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 22

Un parque de bomberos recibe un suministro especial de polvo extintor, que les llega en envases de tres fabricantes diferentes: A, B y C. El fabricante A entrega el producto en envases de 250 g por un precio de 1 euro cada uno. El fabricante B lo proporciona en envases de 500 g a 1,80 euros la unidad. El fabricante C lo suministra en envases de 1 kg por 3,30 euros cada uno. El parque recibe un pedido total de 2,5 kg de polvo extintor, en un lote compuesto por 5 envases en total, y ha pagado 8,90 euros por todo el pedido. Sabiendo esto, determina cuántos envases se han recibido de cada tipo.

Marca A: 2 envases.

Marca B: 2 envases.

Marca C: 1 envase.

Ejercicio 23

Durante un entrenamiento de rescate en montaña, dos bomberos, Raúl y Sofía, recorren tramos diferentes para asegurar una zona de búsqueda. Raúl avanza por una ruta recta de x metros, y Sofía por otra ruta también recta de y metros, ambas partiendo desde el mismo punto. Al finalizar, se comprueba que ambos han formado un triángulo rectángulo con la línea directa de comunicación entre ellos, y que la distancia directa entre ambos al final del recorrido es de $\sqrt{1184}$ metros. Además, se sabe que Raúl ha recorrido una distancia proporcional a la de Sofía en una razón de 5 a 7. ¿Cuántos metros recorrió cada uno?

Raúl recorrió 20 metros y Sofía recorrió 28 metros.

Ejercicio 24

a) Durante un entrenamiento en la academia de bomberos, los aspirantes deben construir una estructura triangular con una escalera, una cuerda y una base en el suelo, formando un triángulo rectángulo. Por protocolo, los instructores indican que los tres lados deben tener longitudes enteras consecutivas (en metros) para facilitar el montaje rápido y seguro. Si el triángulo formado debe ser rectángulo, ¿cuáles deberían ser las medidas de los tres lados?

Los lados medirán 3, 4 y 5 cm.

b) En el taller del parque de bomberos, se dispone de un tablero de madera de 1200 cm^2 para fabricar dos bases cuadradas que se usarán en una práctica de equilibrio. Una de las bases debe ser más grande que la otra, con 5 cm más de lado. Después de cortar ambas piezas cuadradas, los bomberos descubren que han sobrado 83 cm^2 de madera sin utilizar. ¿Cuánto miden los lados de las piezas cuadradas que se han cortado?

El primer lado de la pieza cuadrada mide 21 cm y el segundo mide 26 cm.

c) Durante una actividad de planificación, los bomberos están diseñando una zona circular para entrenamientos con mangueras. Notan que si aumentan el radio actual de la zona en 3 cm, el área resultante es cuatro veces mayor que la original. ¿Cuál es el radio inicial de la zona de entrenamiento?

El radio buscado es de 3 cm.

Ejercicio 25

Una unidad de intervención de emergencia está preparando un nuevo centro de formación y necesita comprar 400 kg de cemento, 150 kg de ladrillos y 120 kg de azulejos para llevar a cabo la obra. Solicitan presupuesto a dos almacenes de materiales de construcción, el almacén A y el almacén B. El almacén A les ofrece el suministro completo por un precio total de 9800 €. El almacén B, que está realizando una campaña de descuentos, ofrece los materiales a precios reducidos: el cemento cuesta la mitad de lo que cuesta en A, el ladrillo, un tercio, y el azulejo, una cuarta parte. Estas rebajas suponen un ahorro total de 6400 € respecto al presupuesto del almacén A. Además, se conoce que en A, el precio por kg del azulejo es el doble de la suma del precio por kg del cemento y del ladrillo. Determina cuánto cuesta cada kilogramo de cemento, ladrillo y azulejo en el almacén A.

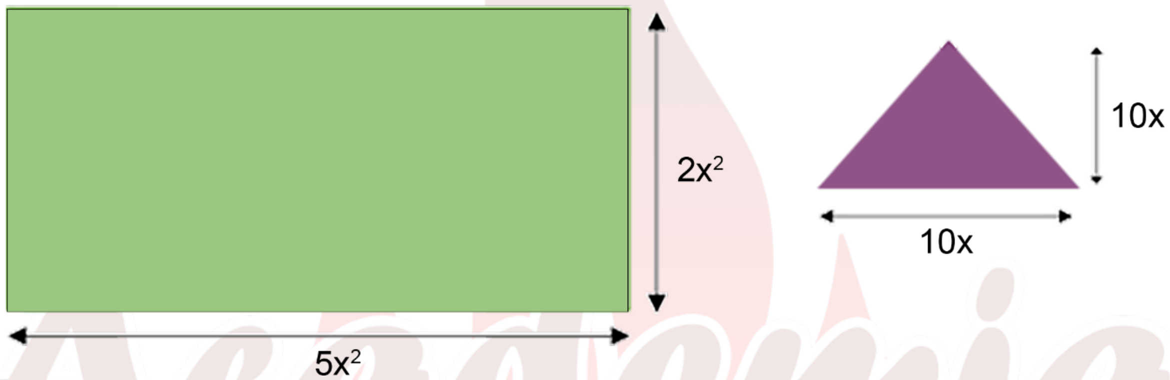
El precio del kg de cemento es de 8€/kg.

El precio del kg de ladrillos es de 12€/kg.

El precio del kg de azulejos es de 40€/kg.

Ejercicio 26

Se quiere cubrir una superficie triangular con una tarima desmontable que previamente cubre un suelo rectangular según el croquis que se adjunta. ¿Habrá tarima suficiente si el cociente entre el área de la superficie rectangular, por un lado, y el área de la superficie triangular menos 625 m^2, por otro, es de 10? Determina las áreas de ambas superficies.



Área del rectángulo = 6250 m2.

Área del triángulo = 1250 m2

Sí, habrá tarima suficiente para cubrir la superficie triangular.

Ejercicio 27

a) Uno de los lados de un rectángulo mide 20 cm, mientras que el otro lado mide x cm. ¿Para qué valores de x el área del rectángulo resulta ser menor que 104 cm²?

El valor de x debe ser menor que 5,2 cm

b) Al multiplicar un número por tres y restarle diez, se obtiene un resultado mayor que si se multiplica ese mismo número por dos y se le suman cuatro unidades. ¿Qué valores de ese número cumplen esta condición?

Todos los números mayores que 14 cumplen la condición.

c) Durante una operación de logística en un simulacro de emergencia, Marcos y Elena, miembros del cuerpo de bomberos, preparan paquetes de suministros. Si se triplica la cantidad de paquetes que prepara Marcos y se le suman los que hace Elena, el total resulta superior a 51. Además, si se duplica lo que prepara Marcos y se resta lo que hace Elena, se obtienen exactamente 24 paquetes. ¿Cuál es el número mínimo de paquetes que pueden haber preparado entre los dos?

Marcos prepara 16 paquetes.

Elena prepara 8 paquetes.

El mínimo de paquetes es 24.

Ejercicio 28

Carolina, Javier y Pablo son tres opositores a bombero y están preparando una presentación técnica sobre prevención de incendios forestales, como parte de su formación en la academia. Se reparten las tareas de la siguiente manera: Carolina se encarga de recopilar datos estadísticos sobre intervenciones reales, dedicando a ello un 40 % más de tiempo del que Javier invierte en redactar el informe. Pablo, por su parte, se ocupa de la revisión final y de preparar la exposición oral, utilizando para ello un tiempo igual a la mitad del total que suman Carolina y Javier. En total, los tres dedican 18 horas a preparar el trabajo. ¿Cuánto tiempo dedicó cada uno a la elaboración del proyecto?

Javier dedicó 5 horas.

Carolina dedicó 7 horas.

Pablo dedicó 6 horas.

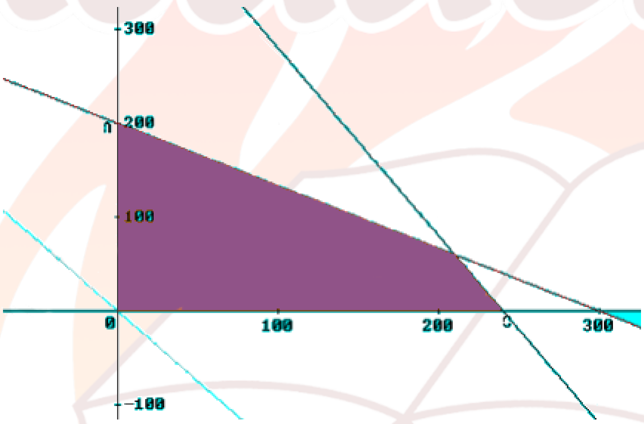
Ejercicio 29

Un parque de bomberos está organizando la fabricación de dos tipos de equipos portátiles de iluminación para sus intervenciones: el modelo A y el modelo B. Para ensamblar cada equipo del modelo A se necesitan 20 minutos de trabajo manual y 20 minutos de uso de maquinaria especializada. Para el modelo B, se requieren 30 minutos de trabajo manual y 10 minutos de máquina. La brigada cuenta con un total mensual de 6000 minutos de trabajo manual y 4800 minutos de uso de maquinaria. Se pide:

a) Plantear el sistema de restricciones correspondiente a esta situación.

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 600 \\ 2x + y \geq 480 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) Representar gráficamente la región factible.



c) Calcular de forma razonada los vértices de dicha región.

Los vértices de la región factible son:

$V_1 = (0, 200)$

$V_2 = (210, 60)$

$V_3 = (240, 0)$

d) Determinar cuántos equipos de los modelos A y B pueden fabricarse diariamente como máximo, respetando los recursos disponibles.

240 equipos del modelo A y 200 del equipo B.

Ejercicio 30

a) En un grupo de formación de aspirantes a bombero, que debe contar como mínimo con 25 alumnos, se han ofertado dos especialidades optativas: Rescate en Altura y Emergencias Químicas. Cada aspirante debe inscribirse en solo una de las dos. Inicialmente, se matriculan en la especialidad B el doble de alumnos que en A. Sin embargo, una semana después de comenzar el curso, 5 alumnos cambian su matrícula de Emergencias Químicas a Rescate en Altura, y entonces hay más inscritos en A que en B. ¿Cuántos alumnos hay en total en el grupo?

27 alumnos.

b) En un curso de formación para bomberos, Diego tiene actualmente la mitad de edad que su instructor. Hace 13 años, la edad de Diego era inferior a un tercio de la que tenía su instructor en aquel momento. Se estima que dentro de 4 años, la suma de sus edades será mayor a 80 años. ¿Cuál es la edad actual de Diego y la de su instructor?

Diego tiene 25 años.

Su instructor tiene 50 años.