EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS

COLECCIÓN DE REPASO 3

"Las personas exitosas tienen miedo, las personas exitosas tienen dudas y las personas exitosas tienen preocupaciones. Simplemente no permiten que estos sentimientos los detengan."

T. Harv Eker (1954-Actualidad)

Ejercicio 1

a) Dada una progresión aritmética en la que el segundo término es 1 y el quinto es 7, determina la fórmula del término general y calcula la suma de los primeros 15 términos.

Término general: $a_n = 2n - 3$

Suma: 195

b) En una progresión aritmética, el sexto término es 10,5 y la diferencia es 1,5. Halla el valor del primer término y la suma de los primeros 9 términos.

Primer término: $a_1 = 3$

Suma: 81

c) Se sabe que el quinto término de una progresión aritmética es –7 y que la diferencia entre términos consecutivos es –3. Calcula el primer término y la suma de los primeros 12 términos.

Primer término: $a_1 = 5$

Suma: -138

d) Determina la suma de los primeros 15 términos de una progresión aritmética, sabiendo que el tercer término es 1 y el séptimo es –7.

Suma: -135

e) Calcula la suma de los 16 primeros términos de una progresión aritmética en la que el cuarto término es 7 y el séptimo es 16.

Primer término: $a_1 = 5$

Suma: 328

Ejercicio 2

Cuenta una antigua leyenda que Shirham, rey de la India, que quedó tan maravillado con el juego del ajedrez que ofreció concederle al inventor, Lahur, cualquier recompensa que deseara. Lahur pidió algo aparentemente modesto: la cantidad de granos de trigo que resultara de colocar un grano en la primera casilla del tablero de ajedrez, y luego ir duplicando la cantidad en cada casilla sucesiva. Es decir, dos granos en la segunda casilla, cuatro en la tercera, ocho en la cuarta, y así sucesivamente hasta completar las 64 casillas del tablero. ¿Cuántos granos de trigo solicitó Lahur en total?

$$S_{64} = 1 \cdot \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$$

Ejercicio 3

a) El primer término de una progresión geométrica es 3, y el octavo es 384. Hallar la razón, y la suma y el producto de los 8 primeros términos.

Razón: 2

Suma: 765

Producto: $2^{28} \cdot 3^{8}$

b) Calcula la suma de los primeros 5 términos de la progresión geométrica: 3, 6, 12, 24, 48…

La suma de los primeros 5 términos es 93.

c) El segundo término de una progresión geométrica es 6, y el quinto es 48. Escribir los 7 primeros términos de la progresión.

3, 6, 12, 24, 48, 96, 192

d) En una progresión geométrica sabemos que $a_1=2$ y $a_4=54$. Halla la razón y la suma de los seis primeros términos.

Razón: 3

Suma de los 6 primeros términos: 728

e) En una progresión geométrica $a_2=6$ y la razón $r=0,5$. Calcula la suma de todos sus términos.

Una progresión geométrica infinita solo tiene suma si la razón está entre -1 y 1, es decir:

$$| r |< 1$$

Como en este caso r=0,5 cumple la condición, así que sí tiene suma infinita.

La suma de todos los términos de la progresión es 24

f) Halla la suma de todos los términos de la sucesión: 15; 3; 0,6; 0,12; 0,024...

La suma de todos los términos de la progresión es 18,75

Ejercicio 4

a) Durante una jornada informativa en el Parque de Bomberos de Molina, el Jefe del Área Técnico-Operativa explicó que el número medio de intervenciones en incendios forestales en toda la Región ha aumentado un 1,12 % anual durante la última década. Si este año el CEIS ha registrado 3000 actuaciones de este tipo, ¿cuántas se estiman dentro de 10 años si esta tendencia se mantiene?

Dentro de 10 años, se estiman aproximadamente 3353 intervenciones si el ritmo de crecimiento se mantiene constante.

b) A lo largo una serie de prácticas de excarcelación en el Parque de Bomberos de Jumilla, se fue añadiendo diariamente una capa de refuerzo metálico a un bastidor de vehículo para simular estructuras más resistentes. El primer día, el espesor de refuerzo era de 10 mm, y al final del día 15, alcanzaba los 80 mm. Si cada día se aplicaba la misma cantidad de refuerzo, ¿cuántos milímetros se añadían diariamente?

Se añadían 5 mm de refuerzo metálico por día.

Ejercicio 5

En una intervención prolongada por incendio industrial en un polígono de Alcantarilla, los bomberos del CEIS de la CARM emplearon una cisterna de 1024 litros de espumógeno. El 1 de octubre se utilizó la mitad del contenido. Al día siguiente, se usó la mitad de lo que quedaba. Este patrón de consumo se repitió diariamente. ¿Qué cantidad de espumógeno se empleó el día 15 de octubre?

El 15 de octubre se utilizaron 0,03125 litros de espumógeno.

Ejercicio 6

En una operación de recarga y equilibrado de botellas de aire comprimido tras una intervención en el municipio de Cehegín, se observaron tres botellas cuya presión (en bares) formaba una progresión aritmética. La suma total de presiones era de 36 bares. Posteriormente, al realizar un reajuste, se aumentaron las presiones en 1, 4 y 43 bares respectivamente, y se comprobó que las nuevas presiones formaban una progresión geométrica. ¿Cuál era la presión inicial en cada una de las tres botellas?

Los tres números son 3, 12 y 21.

Ejercicio 7

En un edificio industrial se produce un derrumbe parcial. Para facilitar distintas maniobras de acceso vertical los bomberos utilizaron una cuerda de 700 metros que se cortó en tres tramos para facilitar. Se sabe que uno de los extremos se cortó con una longitud de 100 metros y que las longitudes de los tres tramos formaban una progresión geométrica. ¿Cuál es la longitud de cada uno de los tres tramos de cuerda?

Las longitudes de los tres tramos de cuerda son 100, 200 y 400 metros.

Ejercicio 8

En una operación de redistribución de cargas para una intervención con bomba nodriza en el municipio de Mula, se utilizaron tres contenedores con líquido espumante cuya cantidad, en litros, seguía una progresión geométrica. La suma total entre los tres contenedores era de 248 litros, y la diferencia entre el que más contenía y el que menos era de 192 litros. ¿Cuántos litros de espumante había en cada contenedor?

Los tres contenedores tenían 8, 40 y 200 litros.

Ejercicio 9

Durante la fase de diseño de un nuevo módulo de almacenaje en el Parque de Bomberos de Jumilla, se diseña una nave con forma de ortoedro cuyas tres dimensiones (alto, ancho y largo) siguen una progresión geométrica. Se ha proyectado que la suma del contorno total de la nave (es decir, el perímetro de todas sus aristas) sea de 420 metros, y su volumen interior de almacenamiento debe ser de 8000 m^3. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del módulo?

Las dimensiones del ortoedro son 5, 20 y 80 metros.

Ejercicio 10

a) Calcular la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética, cuyo primer término es 4 y cuya diferencia es 3, sabiendo que el término n es 40.

$S_{13} = 286$

b) De una progresión aritmética conocemos los términos $a_8 = 29$ y $a_{11} = 44$. Calcula la diferencia de la sucesión, el primer término y el término general de la sucesión.

$d = 5$

$a_1 = -6$

$a_n = 5n - 11$

c) Hallar el número de términos de una progresión aritmética que tiene por primer término 7, por último 112 y por diferencia 3.

36 términos.

d) Cuál será la profundidad de un pozo si por el primer metro se han pagado 760 € y por cada uno de los restantes, 150€ más que el metro anterior. El pozo ha costado 43700€.

20 metros de profundidad.

e) Calcula la suma de los 80 primeros múltiplos de 4.

$S_{80} = 12960$

Ejercicio 11

a) Para la preparación de un simulacro en un parque de bomberos, se tiene en cuenta que el tiempo climatológico puede clasificarse únicamente como bueno o malo. Los responsables saben que, de un día para otro, la probabilidad de que el tiempo cambie es de 0,3. Si el 20 de abril la probabilidad de que haga buen tiempo es del 40 %, ¿cuál es la probabilidad de que el 21 de abril el simulacro pueda desarrollarse con buen tiempo?

46%

b) En el proceso de control de calidad de los equipos de detección instalados en los vehículos del CEIS, se ha determinado que el 12 % de los equipos presenta una falla crítica. Se dispone de una prueba para detectar esta falla, aunque no es completamente fiable. Se sabe que dicha prueba da positivo en el 90 % de los casos cuando el equipo tiene realmente la falla, y da positivo en el 5 % de los casos cuando el equipo está en buen estado. ¿Cuál es la probabilidad de que un equipo se encuentre en buen estado (es decir, sin la falla) cuando la prueba resulta positiva?

29%

Ejercicio 12

a) Se extraen dos cartas de una baraja española y se tira un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que las cartas sean sotas y el número del dado sea par?

$$\mathrm{P}[\text{dos sotas y par}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{260}$$

Ya que hay independencia entre las extracciones de las cartas y el lanzamiento del dado.

b) Durante una revisión rutinaria del material en el parque de bomberos de Lorca, el sargento del parque pide reorganizar los dispositivos de señalización nocturna. Hay dos maletines con balizas luminosas: el primero contiene 7 balizas de luz blanca y 3 de luz roja; el segundo, 3 balizas de luz blanca y 6 de luz roja. Uno de los bomberos de la guardia, sin comprobar el color, traslada una baliza del primer maletín al segundo. Después, otro bombero distinto toma al azar una baliza del segundo maletín para incorporarla al vehículo de primera salida. ¿Cuál es la probabilidad de que la baliza que selecciona este segundo bombero emita luz blanca?

0,37

Ejercicio 13

El Jefe de la Sección de Prevención y Formación del CEIS debe elegir al responsable del próximo curso de intervenciones en espacios confinados. Se han propuesto seis candidatos: un bombero de Alcantarilla (A), uno de Molina (B), un cabo de Lorca (C), uno de Cieza (D), un cabo del parque de Mazarrón (E) y un cabo del parque de Caravaca (F). Según los datos de valoración interna:

- Los bomberos y cabos de Molina, Lorca y Cieza (B, C y D) tienen la misma probabilidad de ser elegidos, y esta es la mitad de la probabilidad de que sea elegido el bombero de Alcantarilla (A).
- El cabo de Mazarrón (E) y el cabo de Caravaca (F) tienen la misma probabilidad, que es el triple de la del bombero de Alcantarilla.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea elegido cada candidato?

$$\mathrm{P}[\mathrm{A}] = \frac{2}{17}$$

$$\mathrm{P}[\mathrm{B}] = \mathrm{P}[\mathrm{C}] = \mathrm{P}[\mathrm{D}] = \frac{1}{17}$$

$$\mathrm{P}[\mathrm{E}] = \mathrm{P}[\mathrm{F}] = \frac{6}{17}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el elegido sea el bombero de Alcantarilla o el cabo de Caravaca?

$$\mathrm{P}[\mathrm{A} \cup \mathrm{F}] = \frac{2}{17} + \frac{6}{17} = \frac{8}{17}$$

Ejercicio 14

En el taller del CEIS de la CARM se revisan periódicamente los equipos de respiración autónoma (ERA) antes de distribuirlos a los distintos parques. Estos equipos se montan en tres líneas de revisión técnica: la A, la B y la C. La línea A revisa el 20% del total de equipos que se entregan; la línea B, el 50%; y la C, el 30%. Se ha observado que la probabilidad de que un equipo presente una anomalía técnica tras la revisión es de 1/3 en la línea A, 1/6 en la B y 1/4 en la C.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un equipo elegido al azar no presente anomalías?

$P[\overline{D}] = 77{,}5\%$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no presente anomalías y haya sido revisado en la línea B?

$P[\overline{D} \cap B] = 41{,}6\%$

c) Si se detecta que un equipo está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya pasado por la línea C?

$P[C/D] = 33{,}33\%$

Ejercicio 15

Durante una jornada de puertas abiertas en el Parque de Bomberos de Molina de Segura, se invitó a estudiantes de distintos institutos a participar en actividades divulgativas. Se registró que el 35 % de los estudiantes asistentes participó en el taller de simulación de intervención en incendios urbanos. De entre quienes participaron en dicho taller, el 70 % mostró interés por las aplicaciones de las Matemáticas en el análisis de riesgos. Por otro lado, entre los que no participaron en el taller, solo el 25 % manifestó ese mismo interés.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante elegido al azar muestre interés por las Matemáticas aplicadas al análisis de riesgos?

$$\mathrm{P}(\text{matemáticas aplicadas}) = 0{,}4075 = 40{,}75\%$$

b) Si se sabe que un estudiante no se interesó por las Matemáticas aplicadas, ¿cuál es la probabilidad de que no participara en el taller de simulación?

$$\mathrm{P}\left(\text{taller de simulación} \mid \overline{\text{matemáticas aplicadas}}\right) = \frac{0{,}4875}{0{,}5925} = 0{,}8226 = 82{,}26\%$$

Ejercicio 16

En el Centro de Coordinación del CEIS de la CARM se han evaluado tres sistemas diferentes de comunicación de emergencias: S_1, S_2 y S_3, que se utilizan en proporciones iguales para la gestión de intervenciones en los distintos parques. Tras una auditoría técnica, se observa que el sistema S_1 genera errores en el 3 % de los avisos, S_2 en el 5 % y S_3 en el 2 %. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un aviso gestionado al azar por uno de estos sistemas contenga un error?

$$P(E) \approx 0{,}0333 = 3{,}33\%$$

b) ¿Y la probabilidad de que el aviso no contenga error?

$$P(\bar{E}) \approx 0{,}9667 = 96{,}97\%$$

c) Si se selecciona un aviso al azar y se verifica que no presenta error, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido gestionado por el sistema S3?.

$$P(S_3 \mid \bar{E}) \approx 0{,}3379 = 33{,}79\%$$

Ejercicio 17

La probabilidad de que un aspirante a Jefe de la Sección Técnico-Operativa supere con éxito el curso de formación para el acceso al puesto tras superar la primera parte de la oposición es del 0,6. Calcula la probabilidad de que, entre tres aspirantes que han realizado dicho curso:

a) Los tres superen la formación.

21,6%

b) Ninguno la supere.

6,4%

d) Al menos uno la supere.

93,6%

e) Solo uno la supere.

28,8%

Ejercicio 18

1. Juan tiene dos urnas A y B. En la urna A hay 4 bolas blancas y 2 bolas negras y en la urna B hay 6 bolas blancas y 8 bolas negras. Juan cierra los ojos y mete la mano en la urna A, saca una bola y, sin mirarla, la pasa a la urna B. Así, la urna B queda con 15 bolas: las 14 originales y la que Juan pasó desde la urna A. Después, Juan mete la mano en la urna B, revuelve las bolas, y saca una bola.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola que saca de la urna B sea exactamente la misma que la que pasó desde la urna A?

   $$\frac{1}{15}$$

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola que saca de la urna B sea blanca?

   $$\frac{4}{9}$$

   c) Si la bola que saca de la urna B es blanca, ¿qué probabilidad hay de que la bola que pasó desde la urna A fuera blanca?

   $$\frac{7}{10}$$

2. En una urna hay 2 bolas blancas, 4 bolas negras y 5 bolas rojas. Se extraen dos bolas de la urna, una tras otra sin reemplazamiento. Calcular:

   a) La probabilidad de que las dos sean rojas.

   $$\frac{2}{11}$$

   b) La probabilidad de que sean de distinto color.

   $$\frac{38}{55}$$

   c) La probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja.

   $$\frac{5}{11}$$

   d) Sea A el suceso “la primera bola extraída es roja” y B el suceso “las dos bolas son del mismo color”, ¿son los dos sucesos A y B independientes?

   No son independientes.

Ejercicio 19

Se ha analizado el origen de los incendios que activaron la intervención de los parques del CEIS de la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia en horario nocturno. Se concluyó que el 65% de estos siniestros fueron causados por quemas incontroladas de restos agrícolas, el 25% por instalaciones eléctricas defectuosas en viviendas, y el 10% restante por otras causas (vehículos incendiados, contenedores, etc.). En cuanto a las consecuencias, se comprobó que el resultado fue grave en el 30% de los casos provocados por quemas agrícolas, en el 20% de los provocados por fallos eléctricos, y en el 5% de los restantes.

a) Calcula la probabilidad de que un incendio de este tipo no tenga consecuencias graves.

La probabilidad de que un incendio no tenga consecuencias graves es 0,75.

b) Si se sabe que un incendio no tuvo consecuencias graves, ¿cuál es la probabilidad de que su origen haya sido una quema agrícola?

Si el incendio no fue grave, la probabilidad de que su causa haya sido quema agrícola es aproximadamente 0,607.

Ejercicio 20

En un estudio reciente realizado por el Centro de Coordinación del CEIS, se analizaron los tiempos de respuesta en dos tipos de incidentes atendidos durante el mes de mayo. Se registraron un total de 50 intervenciones: 20 en zonas urbanas y 30 en zonas rurales. De los incidentes urbanos, el 70% concluyó en menos de 15 minutos, mientras que en las zonas rurales únicamente el 40% alcanzó ese tiempo de respuesta.

a) Calcula la probabilidad de que, al seleccionar al azar una intervención, se trate de una respuesta que se haya completado en menos de 15 minutos.

52%

b) Si se sabe que una intervención se completó en menos de 15 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que haya tenido lugar en una zona urbana?

53,85%

Ejercicio 21

1. Para la gestión del parque de vehículos de un cuerpo de bomberos, se asignan códigos numéricos de cinco cifras a los vehículos utilizando únicamente los dígitos 4, 5 y 6. Cada código identifica una combinación única de unidad y equipamiento. Se pide:

   a) ¿Cuántos códigos distintos de cinco cifras pueden formarse si pueden repetirse los dígitos?

   Nos importa el orden, y no sólo cogemos todos los elementos, sino que pueden repetirse. Por lo tanto, son variaciones con repetición:

   $$\mathrm{VR}_{3,5} = 3^5 = 243 \text{ números de cinco cifras}$$

   b) ¿Cuántos de esos códigos corresponden a vehículos cuya numeración termina en cifra par (es decir, en 4 o 6), ya que estos indican vehículos adaptados para rescates técnicos?

   Para ello nos fijamos sólo en la última cifra, que puede valer 4, 5 o 6. Pero los únicos números que nos interesan son el 4 y el 6, o sea dos números de cada tres van a ser pares.

   $$243 \cdot \frac{2}{3} = 162 \text{ números pares}$$

2. Durante la planificación de intervenciones en incendios forestales, el Coordinador 112 asigna códigos numéricos de tres cifras a cada unidad de intervención, utilizando los dígitos 0, 1, 2, 3, 4 y 5. Cada código debe estar formado por cifras distintas para evitar confusiones en las transmisiones por radio. Los números no pueden empezar por el 0. ¿Cuántos códigos distintos pueden asignarse a las unidades?

   No cogemos todos los elementos, no se repiten las cifras y sí importa el orden. En principio, se trata una vez más de variaciones. Pero no podemos formar un número cuya primera cifra sea cero, por lo tanto, tenemos que dividir el problema en dos partes:

   a) ¿Cuántas posibilidades hay para la primera cifra? Esta es fácil: 5.

   b) ¿Cuántas cifras tenemos disponibles para los dos dígitos que nos quedan, y de cuántas formas pueden ordenarse? Tenemos cinco cifras: el cero más los números del 1 al 5, menos la cifra que ya hemos utilizado.

   Ahora sí que calculamos unas variaciones normales: $\mathrm{V}_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20$

   5 posibilidades para la primera posición por cada una de las 20 ordenaciones posibles para la segunda y tercera posición, nos dan 100 números.

Ejercicio 22

Con motivo de una nueva convocatoria de oposiciones para cubrir plazas de bombero-conductor en el Consorcio de Extinción de Incendios y Salvamento de la Región de Murcia, debe formarse un tribunal calificador. Para ello, se cuenta con una lista de 5 miembros del cuerpo técnico-operativo (hombres) y 7 miembros del cuerpo administrativo (mujeres), de los cuales se seleccionará un comité evaluador compuesto por 2 técnicos-operativos y 3 administrativas. La formación del tribunal debe cumplir las siguiente condiciones:

- Puede pertenecer a él cualquier hombre o mujer.
- Una administrativa, que ejerce habitualmente como secretaria del tribunal, debe formar parte de él.
- Dos de los técnicos-operativos no pueden coincidir en el tribunal por incompatibilidades previas

En todos los casos, no importa el orden de elección, por lo que tendremos que trabajar con combinaciones. El truco está en tratar cada subgrupo (hombres y mujeres) por separado, y luego multiplicar las posibilidades de uno por las del otro.

Paso 1: Elegir los 2 técnicos-operativos (hombres)

Tenemos 5 disponibles: T1,T2,T3,T4,T5, pero no se puede elegir simultáneamente a T1 y T2.

Sin restricciones, elegir 2 de 5 sería:

$$\binom{5}{2} = 10$$

Pero hay 1 combinación no válida, por lo que el número de combinaciones sería:

$$\binom{5}{2} - 1 = 9$$

Paso 2: Elegir 3 administrativas, sabiendo que la secretaria debe estar por lo que tenemos que elegir 3 administrativas y una de ellas ya está fija. Por tanto, solo tenemos que elegir 2 más de las 6 restantes:

$$\binom{6}{2} = 15$$

Paso 3: Total de tribunales posibles

Multiplicamos el número de elecciones posibles para hombres y mujeres:

$9 \cdot 15 = 135$ formas distintas de formar el tribunal calificador cumpliendo todas las condiciones.

Ejercicio 23

1. En una jornada de formación para los jefes de la sección técnico operativa se organiza una simulación de coordinación en sala para una gran catástrofe. Seis miembros de la sección técnico-operativa deben sentarse en una fila de butacas frente al panel de mando para asumir distintos roles que tiene asignada cada butaca. ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse?

   Como trabajamos con todos los elementos, y sí importa el orden en que los coloquemos, se trata de permutaciones. Por supuesto, sin repetición, porque no podemos duplicar una persona. Por lo tanto, son permutaciones:

$$\mathrm{P}_6 = 6! = 720 \text{ formas distintas}$$

2. El área de prevención del CEIS de la Región de Murcia está desarrollando un nuevo sistema de señalización visual para delimitar zonas de intervención en siniestros de gran envergadura. Para ello, cuentan con siete colores distintos de cinta reflectante. El equipo técnico necesita diseñar combinaciones de cuatro colores distintos, en distinto orden, para codificar situaciones específicas en cada tipo de emergencia. ¿De cuántas formas distintas puede diseñarse esta señalización si se mezclan cuatro colores diferentes tomados de los siete disponibles y el orden importa?

   Esto es una variación sin repetición, porque se seleccionan 4 colores de 7 sin repetir y el orden importa.

$$\mathrm{V}_{7,4} = \frac{7!}{(7-4)!} = 840 \text{ combinaciones distintas de 4 colores}$$

Ejercicio 24

1. Durante una campaña de prevención organizada por el CEIS de la Región de Murcia en centros escolares, 13 bomberos participan en una exhibición pública. Entre ellos hay 7 bomberos-conductores y 6 cabos. Para la presentación final, deben colocarse en fila sobre el escenario, alternando estrictamente ambos tipos de personal, es decir, no puede haber dos cabos ni dos bomberos-conductores juntos. ¿De cuántas formas distintas pueden colocarse si se cumple esta condición?

   $7! \cdot 6! = 5040 \cdot 720 = 3628800$

2. Con motivo del Día Europeo del 112, al CEIS de la Región de Murcia le han concedido dos plazas para asistir a un congreso nacional sobre emergencias en Valencia. Desde un parque de bomberos donde hay 6 efectivos de guardia, se debe decidir qué dos personas asistirán al evento en representación del parque. ¿De cuántas formas distintas se puede elegir a los dos representantes?

   $C_{6,2} = 15$

Ejercicio 25

1. A lo largo de una jornada de formación en el CEIS de la CARM, para situaciones de baja visibilidad, como incendios con humo denso o rescates en túneles, se les propone a los bomberos aprender a identificar señales táctiles. Para ello, se les presenta un sistema de lectura táctil basado en combinaciones de seis posiciones que pueden estar o no en relieve. El Jefe de la Sección de Formación y Prevención les plantea el siguiente reto:

   a) ¿Cuántas combinaciones distintas pueden obtenerse utilizando esas seis posiciones con la posibilidad de que cada una esté relieve o no?

   Tenemos dos elementos para formar ordenaciones de 6 elementos:

   $$\mathrm{VR}_{2,6} = 2^6 = 64$$

   b) ¿Serían suficientes esas combinaciones para codificar, de manera única, las 27 letras del alfabeto, los 10 dígitos y 4 signos básicos de puntuación utilizados en las comunicaciones del equipo durante las intervenciones?

   Como ves, hay suficientes posibilidades para 27 letras, 10 números y unos cuantos signos de puntuación.

2. El Gerente del Consorcio de Extinción de Incendios y Salvamento de la Región de Murcia convoca una reunión con 20 trabajadores de distintos parques para tratar mejoras organizativas. Durante el encuentro, se decide formar un comité de trabajo compuesto por 3 personas, que se encargará de recoger propuestas sobre turnos, formación y material operativo. Si cualquier trabajador puede ser elegido y el orden en que se seleccionan no importa, ¿cuántos comités distintos se pueden formar?

   No trabajamos con todos los elementos, no puede haber repeticiones y tampoco importa el orden (sólo qué tres personas resultan escogidas). Se trata, por lo tanto, de combinaciones:

   $$\mathrm{C}_{20,3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = 1140 \text{ comités distintos}$$

Ejercicio 26

1. Durante una jornada de entrenamiento en un parque de bomberos se utilizan cartas numeradas para simular diferentes tipos de intervenciones. El equipo de formación dispone de una baraja de 40 cartas, cada una representando un tipo distinto de escenario (incendio urbano, accidente con atrapados, rescate acuático, etc.). Para cada ejercicio práctico, se extraen 5 cartas sin reemplazo para componer una intervención compuesta por múltiples elementos. ¿Cuántas combinaciones diferentes de 5 cartas pueden obtenerse teniendo en cuenta que el orden en que se sacan las cartas no es relevante a la hora de determinar el tipo de ejercicio?

Este es un problema de combinatoria donde se seleccionan elementos sin repetición y sin importar el orden. Esto corresponde a una **combinación**, y se usa la fórmula:

$$C_{40,5} = \frac{40!}{5! \cdot (40-5)!} = \frac{40!}{5! \cdot 35!}$$

$$C_{40,5} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{78960960}{120} = 658008$$

Hay 658008 combinaciones distintas de 5 cartas extraídas de una baraja de 40 cartas.

2. ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar con las letras de la palabra CONSORCIO que tengan el mismo número de letras sin que las palabras formadas tengan que tener sentido ni se repita ninguna letra?

La palabra tiene 9 letras, 2 de ellas repetidas 3 y 2 veces (la C y la O). Usamos por tanto la fórmula para permutaciones con elementos repetidos:

$$\text{Total de palabras} = \frac{9!}{\text{repeticiones}} = \frac{9!}{2! \cdot 3!} = \frac{362800}{2 \cdot 6} = 30240$$

Se pueden formar 30240 palabras distintas.

Ejercicio 27

En el aula de formación del CEIS en el parque de Lorca, hay 6 manuales técnicos sobre distintas áreas del servicio (rescate en altura, incendios industriales, atención a accidentes de tráfico, etc.), que deben colocarse en un estante según distintas condiciones. Responde a las siguientes preguntas:

a) ¿De cuántas maneras distintas pueden colocarse los 6 manuales si no hay ninguna restricción en el orden?

Todos los manuales son distintos, y se pueden colocar en cualquier orden. Esto es una permutación de 6 elementos: $\mathbf{6! = 720}$ **formas distintas**

b) ¿Y si 3 manuales concretos (por ejemplo, los de formación básica de nuevos bomberos) deben estar juntos en cualquier orden?

Pensamos en ese grupo de 3 manuales como un solo bloque, por tanto:

- Tenemos ahora 4 "elementos" que ordenar: el bloque más los 3 manuales restantes.
- Estos 4 elementos se pueden ordenar de: $4! = 24$ formas
- Y dentro del bloque, los 3 manuales pueden ordenarse de: $3! = 6$ formas

Multiplicamos ambos resultados: $\mathbf{4! \cdot 3! = 24 \cdot 6 = 144}$ **formas distintas**

c) ¿Cuántas ordenaciones son posibles si dos manuales concretos (como los de "Comunicaciones por radio" y "Procedimientos de mando") deben colocarse en los extremos del estante?

Supón que los manuales de "Comunicaciones por radio" y "Procedimientos de mando" deben estar en los extremos del estante. Hay dos posibilidades:

- Uno está a la izquierda y el otro a la derecha, o viceversa → 2 formas
- Quedan 4 manuales distintos para colocar en el centro → $4! = 24$

Multiplicamos: $\mathbf{2 \cdot 4! = 2 \cdot 24 = 48}$ **formas distintas**

d) ¿Y si resulta que 3 de los manuales son copias idénticas del mismo volumen (por ejemplo, el manual de autoprotección), mientras que los otros 3 son distintos?

Tenemos 3 manuales idénticos y 3 distintos por lo que buscamos el total de permutaciones posibles considerando los 6 elementos con repetición:

$$\mathbf{\frac{6!}{3!} = \frac{720}{6} = 120} \textbf{ formas distintas}$$

Ejercicio 28

¿Cuántas quinielas de 14 resultados debemos sellar para estar seguros de obtener 14 aciertos:

a) Supuestos 5 resultados fijos.

Quedan entonces 9 partidos sin conocer su resultado → cada uno tiene 3 opciones.

$$\textbf{Combinaciones posibles} = 3^9 = 19683$$

b) Si ponemos nueve veces "1".

Entonces solo quedan 5 partidos por cubrir, y para cada uno tienes que probar las 3 opciones para cubrir todas las posibilidades. Por lo tanto, lo que realmente se pide es saber cuántas combinaciones de quinielas hay posibles que contengan exactamente 9 unos ("1"). El número de formas de colocar 9 unos ("1") entre los 14 partidos es:

$$\binom{14}{9} = \text{número de formas de elegir las 9 posiciones que llevará n el "1"}$$

En las otras 5 posiciones restantes, puedes poner "x" o "2" (2 opciones por posición). Entonces:

$$\text{Total de combinaciones} = \binom{14}{9} \cdot 2^5 = 2002 \cdot 32 = \textbf{64064 combinaciones posibles}$$

c) Si ponemos ocho veces "1", cuatro veces "x" y dos veces "2".

Aquí el número de resultados no varía (14), pero ya te han dicho cuántas veces debe aparecer cada signo:

- 8 partidos con resultado "1"
- 4 con resultado "x"
- 2 con resultado "2"

Como no hay opciones, solo hay que contar cuántas maneras distintas hay de distribuir estos resultados en los 14 partidos. Es una permutación con elementos repetidos:

$$\frac{14!}{8! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} =$$

$$= \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{2 \cdot 2} = 7 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 9 =$$

$$= \textbf{45048 combinaciones posibles}$$

Ejercicio 29

En una urna hay tres bolas rojas, tres verdes, cuatro negras y dos azules. ¿De cuántas maneras distintas pueden sacarse, bola a bola, de la urna?

Las bolas del mismo color no se distinguen entre sí (no están numeradas). Por tanto, estamos ante un caso de permutaciones con repetición, donde hay grupos de elementos indistinguibles.

$$\text{Formas distintas} = \frac{12!}{3! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{479001600}{1728} = 277200 \text{ formas distintas}$$

Ejercicio 30

En un plano hay rectas que no son paralelas y que no concurren tres en un mismo punto. Si el número de intersecciones es 21. ¿Cuántas rectas hay?

- Hay rectas en el plano que no son paralelas.
- No hay tres rectas que concurran en un mismo punto.
- Se producen 21 intersecciones entre estas rectas.
- ¿Cuántas rectas hay?

Cuando ninguna pareja de rectas es paralela y no hay tres que se crucen en el mismo punto, cada par de rectas se interseca en un único punto. Por tanto, el número total de puntos de intersección posibles entre n rectas es igual al número de combinaciones de 2 rectas entre n:

$$\text{Número de intersecciones} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Y nos dicen que ese valor es 21:

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = 21 \rightarrow n^2 - n - 42 = 0$$

Resolviendo esta ecuación nos queda como solución posible $n = 7$, por lo que hay 7 rectas.