EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS

COLECCIÓN DE REPASO 2

"Nuestra mayor gloria no está en no haber caído nunca, sino en levantarnos cada vez que caemos.

Oliver Goldsmith (1728-1774)

Ejercicio 1

Desde la azotea de un parque de bomberos, el bombero Javier observa la parte más alta y la parte más baja de una torre de comunicación cercana. Desde su posición, ve la cima de la torre con un ángulo de elevación de 45° y la base con un ángulo de depresión de 30°. La distancia horizontal entre la estación y la torre es de 20 metros. Se desea conocer la altura total de la torre para planificar un posible rescate aéreo.

La altura total de la torre es aproximadamente 31,55 metros.

Ejercicio 2

1. Un camión de bomberos asciende desde el punto A al punto B por una carretera inclinada. Recorre 35 metros en línea horizontal y asciende una altura de 12 metros. ¿Cuál es la distancia real, en metros, entre los puntos A y B que recorre el camión?

   La distancia real es de 37 metros.

2. Calcula la medida, en decímetros, de cada lado de un rombo, sabiendo que sus diagonales miden 12 y 16 decímetros.

   El lado mide 10 decímetros.

3. Durante una intervención, un bombero sube por una rampa de evacuación inclinada. Sabe que ha recorrido una distancia real de 85 metros, aunque solo ha avanzado 77 metros en horizontal. ¿Cuál es la altura, en metros, que ha ganado el bombero al subir por la rampa?

   La altura subida es de 36 metros.

4. Un faro de 16 metros de altura manda su luz a una distancia horizontal sobre el mar de 63 metros. ¿Cuál es la longitud, en metros, del haz de luz?

   La longitud del haz de luz mide 65 metros.

Ejercicio 3

En una emergencia, un bombero necesita colocar una escalera para acceder a una ventana de un edificio. Sabe que la base de la escalera debe colocarse a una distancia de 4 metros más que la altura de la ventana respecto al suelo. Además, la longitud total de la escalera es de 20 metros, y la figura formada por la escalera, el suelo y la pared forma un triángulo rectángulo. ¿Cuál es la altura, en metros, a la que se encuentra la ventana?

La altura de la ventana es de 12 metros.

Ejercicio 4

Debido a un accidente de un camión cisterna, los bomberos necesitan cubrir un derrame de gasolina en una zona rectangular. Saben que la longitud de la zona es 7 metros mayor que su anchura. Para asegurarse de que cubre correctamente el área, miden la diagonal de la zona, que resulta ser 8 metros más larga que su anchura. ¿Qué superficie, en metros cuadrados, deberán cubrir para tapar todo el derrame?

Deberán cubrir un área de $60\ \mathrm{m}^2$.

Ejercicio 5

En el módulo de rescate en altura, en la academia de formación, se les pide a los aspirantes que desplieguen una escalera y la apoyen contra una pared. Se sabe que el área del triángulo que se forma entre la escalera, el suelo y la pared es de 30 m^2, y que la suma de las longitudes del tramo en el suelo y el tramo en la pared es de 17 m. ¿Cuánto miden esos dos tramos y qué longitud tiene la escalera?

Solución 1: el tramo del suelo mide 5 metros, el de la pared 12 y la longitud de la escalera es de 13 metros.

Solución 2: el tramo del suelo mide 12 metros, el de la pared 5 y la longitud de la escalera es de 13 metros.

Por la disposición de la escalera según las soluciones, me quedaría con la solución 1 ya que la escalera hay está mejor colocada, aunque matemáticamente con los datos dados en el enunciado las dos respuestas son válidas.

Ejercicio 6

Para rescatar a un ciclista accidentado, un miembro del GRAEC utiliza una cuerda de 13 metros para asegurar un descenso desde la parte alta de un barranco. La cuerda se fija en la parte inferior del mismo y se tensa anclándola a la parte superior del mismo. Se sabe que la distancia del punto de anclaje en la parte baja del barranco respecto de la pared vertical del barranco es 7 metros menor que la altura del barranco ¿Qué profundidad tiene el barranco sabiendo que sus paredes son totalmente verticales? ¿A qué distancia de la pared del barranco se fija la cuerda en la parte inferior del mismo?

La profundidad del barranco es de 12 metros y la distancia desde la pared al punto fijo es de 5 metros.

Ejercicio 7

Desde lo alto de una torre de vigilancia contra incendios, un bombero observa un camión BRP que se aproxima. Inicialmente, el ángulo de depresión bajo el cual lo ve es de 30°. Cuando el camión ha avanzado 140 metros en línea recta, el ángulo de depresión es de 60°. Calcula la altura de la torre de vigilancia sobre el nivel del suelo y la distancia del camión a la base de la torre en el momento de la segunda observación.

La altura de la torre es de 121,24 metros y la distancia del camión a la base de la torre en la segunda observación es de 70 metros.

Ejercicio 8

En el transcurso de un simulacro en un polígono industrial, un equipo de bomberos instala una torre móvil de vigilancia de $3\sqrt{3}$ metros de altura para controlar posibles accesos no autorizados a una zona de almacenamiento de productos inflamables. Frente a la torre hay una pila de bidones metálicos que actúa como obstáculo visual. Esta pila mide $2\sqrt{3}$ metros de alto y se encuentra a 3 metros de distancia horizontal desde la base de la torre. Un operario debe pasar al otro lado de los bidones para revisar unas válvulas de seguridad, pero quiere asegurarse de no ser visto desde la torre, para simular una posible intrusión sin detección. ¿Con qué ángulo respecto a la horizontal ve el bombero la zona justo detrás de la pila de bidones? ¿Cuál es la distancia mínima desde la pila a la que puede colocarse el operario, a ras de suelo, sin ser visto por el bombero?

El ángulo de visión del bombero hacia el suelo justo detrás de la pila es de 30° y la distancia mínima detrás de los bidones para no ser visto (a nivel del suelo) es de 3 metros.

Ejercicio 9

Tras un desprendimiento en una zona montañosa, un equipo de bomberos de rescate y evaluación estructural inspecciona una antigua torre de piedra ubicada al otro lado de un desnivel inaccesible. Dado que no pueden acercarse a la base de la torre, deben calcular su altura de forma indirecta. Desde el punto A, un bombero observa la cima de la torre bajo un ángulo de elevación de 30°. Después, otro bombero avanza acercándose hacia la torre hasta un punto B, 40 metros más cerca del pie de la torre. Desde ese mismo punto B aparece una zona de barranco intransitable desde la que se observa la cima de la torre bajo un ángulo de 60° y la base de la torre bajo un ángulo de 30° de depresión. Calcula la altura de la torre.

La altura exacta de la torre es de 46,19 metros.

Ejercicio 10

Durante una intervención en una zona forestal con fuerte viento, un equipo de bomberos especializados en drones de vigilancia aérea despliega un dron atado mediante un cable de 100 metros de longitud a una base fija en el suelo. Las fuertes rachas de viento desplazan el dron de su posición vertical, y el cable, completamente tenso, forma un ángulo de 30° con la vertical. Mientras el dron se mantiene en esa posición, un bombero observador se encuentra en un punto de control alejado del punto de anclaje del cableen dirección contraria al viento, desde el cual debe levantar la vista con un ángulo de 30° respecto a la horizontal para visualizar el dron. Calcula qué altura tiene el dron sobre el suelo, qué distancia hay desde el punto de observación hasta el dron y qué distancia horizontal hay entre el punto de observación y el punto de sujeción del cable.

La altura del dron es de 86,6 metros.

La distancia desde el punto de observación hasta el dron es de 173,2 metros.

La distancia entre el punto de observación y el de sujeción es de 200 metros.

Ejercicio 11

a) En un rescate en un incendio forestal, un grupo de bomberos necesita tender una cuerda de evacuación entre dos puntos del terreno. Uno de los puntos, A, está en la coordenada (-3, 2), y el otro, B, en (7, -3), ambos ubicados mediante coordenadas GPS siendo la primera coordenada la distancia desde el origen y la segunda la cota respecto del sistema cartesiano de referencia. El cabo a cargo de la maniobra quiere asegurarse de que la pendiente del trayecto no supere un cierto límite para que sea seguro descender con equipo. Calcular la pendiente que va de A a B.

La pendiente es de $m = -\frac{1}{2}$.

b) Para unas operaciones de búsqueda de una persona desaparecida en una zona montañosa, un dron de reconocimiento debe volar siguiendo una trayectoria paralela a la línea imaginaria que une dos torres de vigilancia contra incendios, situadas en las coordenadas C(-2, 2) y D(3, -4) en un plano con un eje cartesiano como referencia. Sin embargo, el dron debe pasar exactamente por la base de comunicaciones instalada en el punto A(7, 8). Determinar la ecuación de la trayectoria del dron en ese plano con coordenadas cartesianas.

$$y = -\frac{6}{5}x + \frac{82}{5}$$

c) Durante una reforma urbanística, el equipo técnico del ayuntamiento, asesorado por los bomberos de la ciudad, marca en el mapa tres puntos estratégicos donde ubicarán tres hidrantes esenciales para cubrir bien un barrio en lo que a extinción de incendios se refiere. Estos puntos están en las coordenadas de un plano A(-5, 2), B(1, 4) y C(4, 5). Antes de confirmar las coordenadas de, el responsable técnico necesita comprobar si los tres hidrantes quedarían perfectamente alineados en una misma línea recta, lo cual facilitaría mucho la instalación de tuberías que se necesitan. Demuestra si los puntos A, B y C son colineales.

Sí, los puntos son colineales ya que las pendientes $m_{AB} = \frac{1}{3}$ y $m_{BC} = \frac{1}{3}$.

Ejercicio 12

El conjunto de los integrantes de la sección técnica del CEIS de la CARM está identificando las calles de acceso en un plano cartográfico digital para organizar la disposición de los efectivos en el dispositivo preventivo de los carnavales de Águilas. Las dos calles principales, representadas por $r \equiv 2x + y - 8 = 0$ y $s \equiv 3x - 2y + 9 = 0$, se cruzan en un punto clave para montar uno de los retenes. Desde ese punto de intersección, parte otra calle con una pendiente de -4 en el plano, que conecta directamente con el centro de salud más cercano. Determinar la ecuación de la recta que une el retén con el centro de salud.

$y = -4x + 10$

Ejercicio 13

El equipo de ingenieros del ayuntamiento trabaja en colaboración con los bomberos para delimitar la zona de exclusión en caso de un escape químico en un polígono industrial. Uno de los ingenieros del ayuntamiento determina la línea recta que representa el límite de esta zona de exclusión. Esta línea, representada por la ecuación $5x + 4y + 20 = 0$, forma, junto con los ejes coordenados del sistema cartesiano del plano sobre el que trabajan, un triángulo que delimita una zona que hay que dejar despejada de mobiliario urbano para una posible intervención y acceso rápido a la zona de exclusión. Calcular el área de dicha zona.

El área que queda dentro de ese triángulo es de 10 metros cuadrados.

Ejercicio 14

Tras un incendio en una antigua fábrica, el equipo técnico del cuerpo de bomberos analiza un plano estructural digital para definir una línea de demolición controlada, necesaria para asegurar la estabilidad del edificio y evitar derrumbes inesperados. Esta línea de demolición está representada en el plano por una ecuación de la forma $Ax-By+4=0$. Se sabe que la línea debe pasar por dos puntos estructuralmente críticos, que fueron marcados durante la inspección con coordenadas:

- Punto C: $(-3, 1)$ → unión de una pared dañada con el forjado
- Punto D: $(1, 6)$ → esquina del segundo nivel con mayor tensión

Se pide determinar los valores de A y B que hacen que la ecuación de la línea de demolición pase exactamente por los puntos C y D indicados en el plano técnico del edificio.

$$A = \frac{20}{19}$$

$$B = \frac{16}{19}$$

Ejercicio 15

a) Durante una simulación de evacuación en un sector urbano, el equipo de bomberos está trabajando con un plano digital para establecer la posición más eficiente del vehículo de mando respecto a una línea de avance trazada en el sistema de coordenadas. Dicha línea, que marca el límite entre zona segura y zona de peligro, está representada por la ecuación $2x - 3y + 9 = 0$. Uno de los técnicos quiere calcular a qué distancia se encuentra el punto de origen del plano (0,0) respecto a esta línea de avance, para establecer una barrera de seguridad en la zona de exclusión. Determina la distancia desde el origen a la recta para planificar el perímetro inicial de seguridad.

$$d = \frac{9\sqrt{13}}{13}$$

b) Los bomberos deben delimitar un corredor de acceso rápido desde el punto base (representado en el plano por el origen de coordenadas) hasta una zona concreta. La ecuación de ese corredor es $x + ky - 7 = 0$. Para que el acceso cumpla con las normativas de seguridad, se requiere que el corredor esté exactamente a 2 metros de distancia del origen. Determina el valor del parámetro k que hace que la distancia desde el origen a la recta sea exactamente 2 metros, asegurando el cumplimiento de los protocolos de seguridad.

$$k = \pm\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Ejercicio 16

Como parte de un proyecto de planificación preventiva frente a incendios urbanos, tres técnicos especialistas del cuerpo de bomberos están asesorando a la administración para diseñar zonas de evacuación peatonal paralelas a una vía principal, en un distrito con alta densidad poblacional. Para trazar estas rutas se utilizan dos líneas rectas paralelas que representan los límites de seguridad entre los que debe circular la población en caso de emergencia. Estas líneas están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$x + 2y + 4 = 0$$

$$2x + 4y - 5 = 0$$

Se requiere calcular la distancia exacta entre ambas líneas para garantizar que la zona de evacuación cumple con el mínimo establecido en los protocolos.

$$d = \frac{13\sqrt{5}}{10}$$

Ejercicio 17

a) Calcula la distancia entre los puntos P(6,−2) y Q(0,6).

$\mathrm{d} = 10$

b) Determina la ecuación de la recta r, que es paralela a la recta $2x - 3y + 4 = 0$ y que pasa por el punto (−1,2).

$2x - 3y + 8 = 0$

c) Encuentra la ecuación de la recta perpendicular a $y - 1 = 0$ que pasa por el punto (3,2).

$x = 3$

Ejercicio 18

En el transcurso de operación de rescate en una zona afectada por un derrumbe, el equipo técnico del cuerpo de bomberos utiliza un plano digital para establecer la ubicación exacta de un punto de control equidistante entre dos accesos de a la zona de intervención. Estos dos accesos están representados por los puntos A(1, 1) y B(4, 2) en el plano. Para garantizar que el punto de control se sitúe exactamente a igual distancia de ambos accesos, el equipo necesita trazar la mediatriz del segmento que los une. Calcula la ecuación de dicha mediatriz.

La mediatriz es $y = -3x + 9$.

Ejercicio 19

Durante un simulacro de rescate en una zona forestal, se marcan en un plano digital (cuyas unidades se miden en metros) tres puntos estratégicos que delimitan una zona de aterrizaje provisional para helicópteros de emergencia. Los tres puntos señalados están definidos por las coordenadas: A(-1, 2), B(5, -1) y C(3, 4). Con el objetivo de verificar si cumple con los requisitos mínimos de superficie segura para una maniobra de aterrizaje, calcula el área del triángulo que forman esos tres puntos.

El área del triángulo es 12 metros cuadrados.

Ejercicio 20

a) En un plano de una zona forestal cercana a una zona de interfaz, la ecuación $141\mathrm{y} - 47\mathrm{x} = 1128$ representa una antigua línea de cortafuegos. Con base en esta línea, se quiere ejecutar un nuevo cortafuegos paralelo que permita reforzar la protección de la zona. Este nuevo cortafuegos deberá pasar por un punto ubicado en las coordenadas $\mathrm{P} = (-4, 4)$. Determina la ecuación del nuevo cortafuegos.

141y − 47x = 752

b) Durante una inspección de seguridad en una zona industrial, los bomberos detectan una antigua zona de contención circular cuyo perímetro fue registrado en unos planos de seguridad mediante la siguiente ecuación $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 - 2\mathrm{x} + 4\mathrm{y} - 4 = 0$. Antes de planificar nuevas rutas de acceso y evacuación, es fundamental conocer con precisión la ubicación del centro y el radio de la circunferencia. Hallar el centro y el radio de la circunferencia representada por dicha ecuación.

Centro: $(1, -2)$

Radio: $\mathrm{r} = 3$

Ejercicio 21

Para la planificación de un operativo de seguridad en un evento masivo al aire libre, el sargento del parque de Molina de Segura delimita una zona de fácil acceso, de forma circular, que debe respetarse. Dicha área tiene su centro ubicado en las coordenadas $(-1,4)$. Por razones de seguridad, la zona descrita debe ser tangente al eje de ordenadas del plano de trabajo que coincide con una ruta de evacuación. Calcular la ecuación de la circunferencia que define dicha zona de fácil acceso.

$(x+1)^2+(y-4)^2=1$

Ejercicio 22

Durante la intervención en un distrito urbano con riesgo de colapso estructural, el equipo de especialistas en estructuras colapsadas de los bomberos debe establecer una zona de vigilancia circular que asegure la cobertura entre dos sensores previamente instalados en los puntos: A(2, 1) y B(–2, 3). Por requerimientos técnicos, el centro de esta circunferencia de vigilancia debe estar ubicado sobre una línea representada por la ecuación $x + y + 4 = 0$. Determina la ecuación de esta circunferencia.

$(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 25$

Ejercicio 23

La superficie cubierta por un derrame de un líquido corrosivo en un recinto industrial queda representada en el plano de seguridad por la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$. La ruta de evacuación para los trabajadores de la industria esta representada por la recta $3x + y - 5 = 0$. Antes de autorizar su uso, es necesario determinar si el derrame ha invadido dicha ruta de evacuación. Calcula la posición relativa entre la circunferencia del derrame y la recta de la ruta de evacuación.

La recta corta a la circunferencia luego no se autorizara el uso esa ruta de evacuación.

Ejercicio 24

Durante un curso de prevención en una zona industrial, el equipo técnico del cuerpo de bomberos delimita una zona de seguridad circular entre dos sensores instalados en los puntos ubicados en A(−5,3) y B(3,1). Dicha circunferencia de seguridad debe tener como diámetro el segmento AB. Calcular la ecuación de la circunferencia con el fin de representar adecuadamente esta área de seguridad en el plano de la operación.

$(x+1)^2+(y-2)^2=17$

Ejercicio 25

En el marco de una auditoría de seguridad en una estación de abastecimiento de gasolina, el cuerpo de bomberos revisa un plano técnico donde aparece representada una zona de contención circular que fue diseñada para aislar posibles fugas. La ecuación que representa dicha zona en el plano es $9x^2 + 9y^2 + 72x - 12y + 103 = 0$. Antes de renovar la certificación de seguridad, es necesario verificar que el área de esta zona es suficiente para cumplir con los protocolos actuales de intervención. Calcular el área del círculo correspondiente a la zona de contención del plano.

El área es 5π.

Ejercicio 26

Para el análisis y la investigación de las causas de un incendio forestal, los bomberos necesitan establecer una zona circular en torno al punto que se sospecha que fue el foco inicial del incendio. Dicho punto es el A(−1,4). Debido a la accidentada orografía de la zona se deduce que esta zona circular debe ser tangente a la línea recta que conecta los puntos B(3,2) y C(−9,3), correspondiente al borde de un cortado en el terreno. Calcular la ecuación de la circunferencia para iniciar las investigaciones del origen del incendio.

$$(x+1)^2+(y-4)^2=\frac{80}{29}$$

Ejercicio 27

Se considera la recta $y = 3 - 2x$ y las siguientes circunferencias:

$$x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 3x + 4y - 3 = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 + 3x + 5y - 5 = 0$$

Estudiar la posición relativa de la recta con respecto a cada circunferencia, determinando si la recta corta a la circunferencia es tangente o es exterior. En caso de intersección o tangencia, hallar los puntos de corte o de tangencia correspondientes.

La recta es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2 = 0$ con un punto de tangencia en $(2, -1)$.

La recta corta a la circunferencia $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 3 = 0$ en los puntos de corte $(1,1)$ y $\left(\frac{18}{5}, -\frac{21}{5}\right)$

La recta es exterior a la circunferencia $2x^2 + 2y^2 + 3x + 5y - 5 = 0$ y no hay puntos reales de corte (las soluciones son complejas).

Ejercicio 28

Se consideran las siguientes dos circunferencias en el plano:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-6y-3=0 \\ x^2+y^2-18x-6y+81=0 \end{cases}$$

Calcula los puntos de intersección entre ambas circunferencias si los hubiere y determina su posición relativa.

Las circunferencias tienen un punto de tangencia en (6,3) y por tanto son tangentes entre sí.

Ejercicio 29

A continuación, se presentan varias ecuaciones cuadráticas. Se pide analizar cada una de ellas y determinar si la ecuación representa una circunferencia y en caso afirmativo, calcular su centro y su radio.

a) $x^2 + y^2 - 10x + y + 7 = 0$

Centro: $\left(5, -\frac{1}{2}\right)$

Radio: $\frac{\sqrt{73}}{2}$

b) $x^2 - y^2 + 3x - 5y - 2 = 0$

No es una circunferencia.

c) $x^2 + xy + y^2 - 4x + 8y - 3 = 0$

No es una circunferencia.

d) $4x^2 + 4y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$

Centro: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

Radio: $\frac{5\sqrt{5}}{4}$

e) $x^2 + y^2 + 3x + 5y = 15$

Centro: $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

Radio: $\frac{\sqrt{94}}{2}$

Ejercicio 30

En una zona urbana, los bomberos requieren de una zona de trabajo circular alrededor de un incendio de un bloque de viviendas. Le piden a la policía local que les asista en el establecimiento de esta zona de trabajo teniendo en cuenta que el centro de la zona debe ser equidistante respecto a dos hidrantes recientemente revisados, situados en los puntos A = (2, 1) y B = (6, 9). Además, el centro también debe situarse sobre la recta $y = 5$. Sin embargo, el área no puede invadir el recinto de la plaza de toros, cuya planta está definida por la circunferencia: $(x-4)^2 + (y-10)^2 = 4$. Determinar la ecuación de la circunferencia correspondiente a la zona de trabajo.

La ecuación de la circunferencia correspondiente a la zona de abastecimiento es $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 9$.