

MATEMÁTICAS

TEMA 9

SUCESIONES. SUCESIONES ARITMÉTICAS.

SUCESIONES GEOMÉTRICAS.

DETERMINACIÓN DE UNA SUCESIÓN.

SUCESIÓN DE FIBONACCI. OPERACIONES
CON SUCESIONES.

TEMA 10

PROGRESIONES. PROGRESIÓN ARITMÉTICA.

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA.



“Aquellos que quieren conocer el arte de calcular, sus sutilezas e ingenuidades, deben saber computar con las figuras de la mano. Con estas nueve figuras y el signo 0, llamado zephyrum, se puede escribir el número que sea.”

Leonardo de Pisa o Fibonacci (1170-1240)

1. SUCESIONES

1.1. DEFINICIONES

Una **sucesión de números reales** es una secuencia ordenada de números. Como ejemplos podemos citar las siguientes secuencias:

a) $1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots$

b) $2, 4, 6, 8, 10, 12 \dots$

c) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots$

Una **sucesión de números reales** es una aplicación entre los números naturales y los números reales:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow a_n$$

En el ejemplo anterior, la sucesión $2, 4, 6, 8, 10, 12 \dots$ la podemos ver como:

$$1 \rightarrow 2$$

$$2 \rightarrow 4$$

$$3 \rightarrow 6$$

$$4 \rightarrow 8$$

$$n \rightarrow 2n$$

Se llama **término de una sucesión** a cada uno de los elementos que constituyen la sucesión.

Lo realmente importante a la hora de nombrar los términos de una sucesión es el subíndice porque denota el lugar que ocupan en la sucesión. Las letras con las que se designa la sucesión son distintas para sucesiones distintas y suelen ser letras minúsculas.

Aunque una sucesión es una función, usualmente no se utiliza la notación de función sino que únicamente se escribe su término general.

Se llama **término general de una sucesión** al término que ocupa el lugar n -ésimo y se escribe con la letra que denote a la sucesión (por ejemplo a) con subíndice n : (a_n) .

En los ejemplos anteriores, los términos generales de las sucesiones son:

a) $a_n = n$

b) $b_n = 2n$

c) $c_n = \frac{1}{n}$

A continuación, dentro de las sucesiones, conviene definir lo que son las sucesiones regulares y las sucesiones recurrentes.

Se define como **sucesión regular** a aquella cuyos términos siguen una determinada regla. Para ello se puede buscar una ley de formación que consiste en dar la ley que genera la sucesión.

Por otro lado, se define como **sucesión recurrente** a aquella cuyos términos se obtienen a partir de los anteriores.

1.2. FORMAS DE DETERMINAR UNA SUCESIÓN

En cuanto a las formas que existen para definir una sucesión, se puede:

1.2.1. DAR UNA PROPIEDAD QUE CUMPLAN LOS TÉRMINOS DE ESA SUCESIÓN

Ejemplos:

- Sucesión de los números pares: 2, 4, 6, 8, 10...
- Sucesión de los números primos: 2, 3, 5, 7, 11...
- Sucesión de los números naturales acabados en 7: 7, 17, 27, 37...
- Sucesión de los cuadrados de los números naturales: 1, 4, 9, 16...
- Sucesión de los cubos de los números naturales: 1, 8, 27, 64...

1.2.2. DAR SU TÉRMINO GENERAL O TÉRMINO N - ÉSIMO

Es una expresión algebraica en función de n. Como ejemplo:

$$a_n = n^2 + 5$$

Sabiendo esto, podemos construir los términos de la sucesión sin más que sustituir n por los números naturales. Así, tendríamos:

$$a_1 = 1^2 + 5 = 6$$

$$a_2 = 2^2 + 5 = 9$$

$$a_3 = 3^2 + 5 = 14$$

$$a_4 = 4^2 + 5 = 21$$

1.2.3. USAR UNA LEY DE RECURRENCIA

Es una expresión que permite obtener un término a partir de los anteriores. Como por ejemplo, la sucesión: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34... es conocida como Sucesión de Fibonacci y se obtiene con la siguiente ley de recurrencia:

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

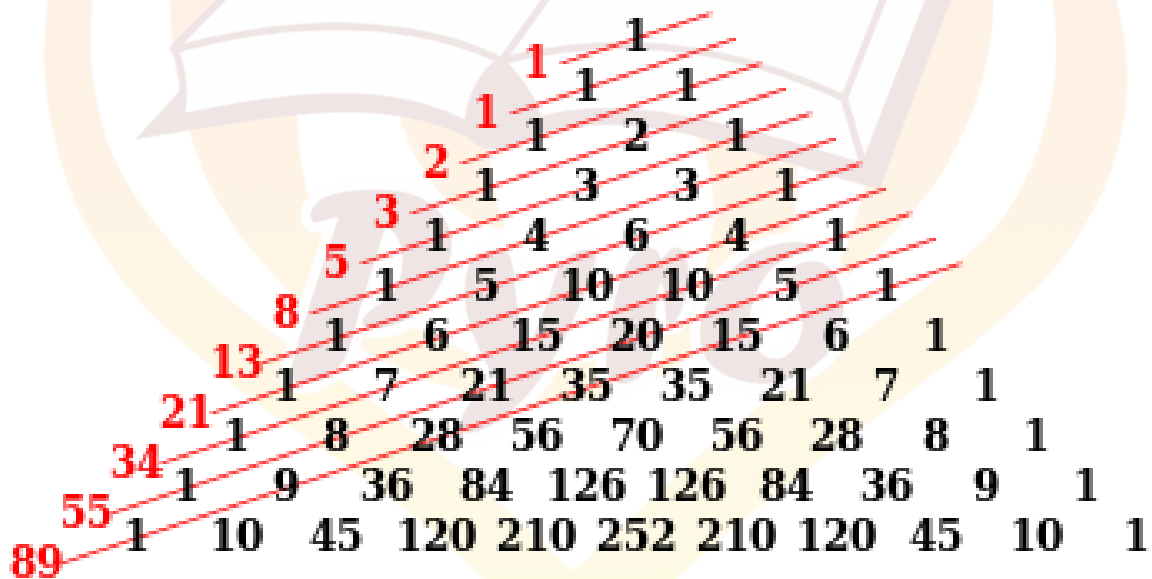
Es decir, cada término, salvo los dos primeros, se obtiene como suma de los dos anteriores.

Por ejemplo, la sucesión formada por las cifras decimales de π : 1, 4, 1, 5, 9, 2... constituye un sucesión pero ignoramos la propiedad, la fórmula del término general o la ley de recurrencia que nos permite, por ejemplo, conocer la cifra que ocupa el lugar un trillón.

La **sucesión de Fibonacci** es una sucesión infinita de números naturales como la siguiente:

La sucesión comienza con dos números naturales cualesquiera y a partir de estos, «cada término es la suma de los dos anteriores», es la relación de recurrencia que la define.

De entre las múltiples propiedades que tiene esta sucesión destacaremos que los números de Fibonacci aparecen al **sumar las diagonales del triángulo de Pascal**, por la utilidad de este último para el desarrollo de binomios elevados a la n-esima potencia:



Página 3 de 9

1.4. OPERACIONES CON SUCESIONES

En lo que respecta a las operaciones básicas de las sucesiones se tiene que dadas las sucesiones a_n y b_n , tales que:

$$a_n = a_1, a_2, a_3 \dots a_n$$

$$b_n = b_1, b_2, b_3 \dots b_n$$

1.4.1. SUMA DE SUCESIONES

$$a_n + b_n = a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \dots a_n + b_n$$

1.4.2. DIFERENCIA DE SUCESIONES

$$a_n - b_n = a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \dots a_n - b_n$$

1.4.3. PRODUCTO DE SUCESIONES

$$a_n \cdot b_n = a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3 \dots a_n \cdot b_n$$

1.4.4. COCIENTE DE SUCESIONES

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3} \dots \frac{a_n}{b_n}$$

2. PROGRESIONES

Pasando a hablar sobre las **progresiones**, estas son un tipo de sucesiones, regulares y recurrentes. Vamos a tratar esencialmente las progresiones aritméticas y las progresiones geométricas.

2.1. PROGRESIÓN ARITMÉTICA Y PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Una **progresión aritmética** es una sucesión de números reales en la que la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión es constante. A esta constante se le llama **diferencia de la progresión** y se suele denotar con la letra d , es decir, cada término se obtiene sumando al anterior la diferencia, d :

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Como ejemplo de progresión aritmética se puede plantear aquella cuyo primer término sea $a_1 = 2$ y su diferencia sea $d = 3$. Los cinco primeros términos de esta progresión aritmética serían, por tanto:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = a_1 + d = 2 + 3 = 5$$

$$a_3 = a_2 + d = 5 + 3 = 8$$

$$a_4 = a_3 + d = 8 + 3 = 11$$

$$a_5 = a_4 + d = 11 + 3 = 14$$

Una **progresión geométrica** es una sucesión de números reales en la que el cociente entre cada término y el anterior es constante. A esta constante se denomina razón de la progresión y se suele denotar con la letra r . Es decir: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ siendo n un número natural y siempre que a_n sea distinto de cero. Otra manera de decirlo, es que cada término se obtiene multiplicando el anterior por la razón r :

$$a_{n+1} = a_n \cdot r$$

Como ejemplo de progresión aritmética se puede plantear aquella cuyo primer término sea $a_1 = 3$ y su diferencia sea $r = 4$. Los cinco primeros términos de esta progresión geométrica serían, por tanto:

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = a_1 \cdot r = 3 \cdot 4 = 12$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = 12 \cdot 4 = 48$$

$$a_4 = a_3 \cdot r = 48 \cdot 4 = 192$$

$$a_5 = a_4 \cdot r = 192 \cdot 4 = 768$$

2.2. TÉRMINO GENERAL DE UNA PROGRESIÓN

Cada una de estas progresiones tiene un **término general**, el cual responderá a distintas fórmulas según sea del tipo aritmético o geométrico.

El **término general de una progresión aritmética** es:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

El **término general de una progresión geométrica** es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

2.3. SUMA Y PRODUCTO DE LOS N PRIMEROS TÉRMINOS

Asimismo, dentro de las definiciones y conceptos a manejar relativos a las progresiones, hay que destacar la **suma y el producto de los n primeros términos**.

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética viene dada por:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica viene dada por:

$$S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r - 1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \text{ siempre que } r \neq 1$$

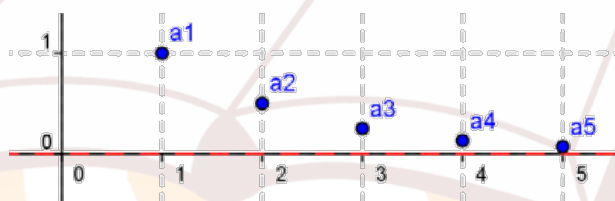
El producto de los n primeros términos de una progresión geométrica es:

$$P_n = \pm \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \pm a_1 \cdot r^{\frac{n-1}{2}}$$

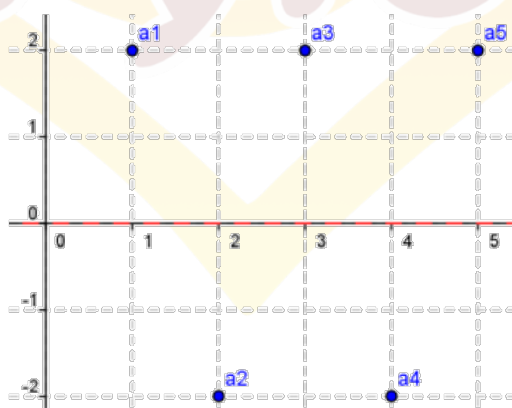
En lo que respecta a la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica, primeramente veremos una serie de conceptos previos necesarios antes de definirla.

2.4. TIPOS DE SUCESIONES: CONVERGENTES, DIVERGENTES Y OSCILANTES

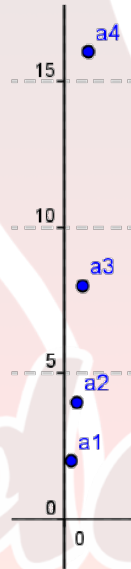
Hay sucesiones como la progresión geométrica $1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \dots$ de razón $1/2$, con término general $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ que se acercan a un cierto número real, aunque puede ocurrir que nunca lleguen a alcanzarlo. Esta progresión geométrica tiende a 0. Decimos entonces que es **convergente**, que converge a 0, o que su límite es 0: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$.



Otras sucesiones como la progresión geométrica $2, -2, 2, -2, 2, -2, \dots$ de razón -1 , con término general $a_n = 2 \cdot (-1)^{n+1}$ no se acercan a un único valor, sino que oscila entre 2 y -2. No tiene límite. Se dice que es una sucesión **oscilante**.



Otras sucesiones, como la progresión geométrica 2, 4, 8, 16, 32... de razón 2, con término general $a_n = 2^n$ no se acercan a un número real, sino que crecen y crecen indefinidamente. No tienen límite. No es convergente. Al aumentar n los valores de la sucesión pueden superar a cualquier número por grande que éste sea. Se dice que su límite es infinito y que la sucesión es **divergente**: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2)^n = \infty$.



Las sucesiones pueden ser convergentes, si tienen como límite un número L , divergentes, si tienden a infinito, y oscilantes.

2.5. MONOTONÍA Y ACOTACIÓN

Para entender estos conceptos veamos los siguientes ejemplos:

- La sucesión 2, 4, 8, 16, 32... es monótona creciente pero no está acotada.
- La sucesión 2, -2, 2, -2, 2, -2... no es monótona, pero si está acotada.
- La sucesión 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, ... es monótona decreciente y está acotada.
- La sucesión 1/2, 1/2 + 1/4, 1/2 + 1/4 + 1/8, ... es monótona creciente y está acotada.

A la vista de estos ejemplos vamos a definir cuándo una sucesión es monótona y cuándo está acotada.

Una sucesión a_n está acotada si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| < k$ para todo n .

Una sucesión a_n es monótona creciente en sentido estricto si para todo n se verifica que $a_n < a_{n+1}$.

Una sucesión a_n es monótona decreciente en sentido estricto si para todo n se verifica que $a_n > a_{n+1}$.

2.6. SUMA DE LOS INFINITOS TÉRMINOS CONSECUTIVOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Dependiendo del valor de r será posible o no obtener la suma de un número ilimitado de términos:

- a) Si $r = 1$, la progresión es la progresión constante formada por el primer término: $\{a_1, a_1, a_1, a_1, \dots\}$ y si a_1 es positivo la suma de los términos será cada vez mayor. Si fuera a_1 negativo sería la suma cada vez mayor en valor absoluto, pero negativa. Por tanto, si el número de términos es ilimitado, esta suma es infinita. Es **divergente**.
- b) Si $|r| > 1$, los términos crecen indefinidamente y el valor de la suma para un número ilimitado de términos, también es infinito. Es **divergente**.
- c) Si $|r| < 1$, la suma de sus términos se aproxima, cuando n es grande, a

$$S_n \approx \frac{a_1}{1-r}$$

Observamos que la suma no depende del número de términos, ya que, al hacerse cada vez más pequeños, llega un momento en que no se consideran. Es **convergente**.

- d) Si $r = -1$, los términos consecutivos son opuestos: $\{a_1, -a_1, a_1, -a_1, \dots\}$ y S_n es igual a cero si n es par, e igual a a_1 si n es impar. La suma de la serie **oscila** entre esos dos valores para un número finito de términos. Para un número de términos ilimitado no sabemos si es par o impar, con lo que la suma no se puede realizar a no ser que $a_1 = 0$, caso en que $S = 0 = \frac{a_1}{1-r}$. En el resto de los casos decimos que la suma de infinitos términos no existe pues su valor es **oscilante**.
- e) Si $r < -1$, los términos oscilan entre valores positivos y negativos, creciendo en valor absoluto. La suma de sus infinitos términos no existe pues su valor también es **oscilante**.

La suma de un número ilimitado de términos de una progresión geométrica de primer término no nulo sólo toma un valor finito si $|r| < 1$, y entonces viene dada por:

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

2.7. APLICACIONES DE LAS PROGRESIONES GEOMÉTRICAS: CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

Como ejemplo de aplicación de las progresiones geométricas podemos mencionar el **cálculo de la capitalización compuesta**.

Si depositamos en una entidad financiera una cantidad de dinero C_0 durante un tiempo t y un rédito r dado en tanto por uno, obtendremos un beneficio $I = C_0 \cdot r \cdot t$ llamado **interés**.

La principal característica de la capitalización compuesta es que los intereses que se generan en un año, pasan a formar parte del capital inicial y producen intereses en los periodos siguientes.

Entonces al final del primer año, el capital será el capital inicial C_0 junto con los intereses producidos durante ese año, es decir, $C_1 = C_0 + I = C_0 + C_0 \cdot r \cdot 1 = C_0 \cdot (1 + r)$

Al final del segundo año, el capital que tendremos será el capital que teníamos al finalizar el primer año más los intereses producidos ese segundo año, es decir,

$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot r \cdot 1 = C_1 \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r) \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r)^2$$

Observando los capitales obtenidos: $C_1, C_2 \dots C_n$ concluimos que se trata de una progresión geométrica de razón $(1 + r)$. Por tanto:

El *año n -ésimo*, tendremos:

El capital final obtenido después de n años dado un capital inicial C_0 y un rédito r dado en tanto por uno, es:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + r)^n$$

