

MATEMÁTICAS

TEMA 7

ECUACIÓN DE LA RECTA. ECUACIÓN DE
LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS.
MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO.

TEMA 8

ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA.



“La matemática universal debe tratar de un método exacto de determinación de las cosas que caen bajo el poder de la imaginación. Es, por así decirlo, una lógica de la imaginación.”

Gottfried Leibniz (1646 - 1716)

1. LUGARES GEOMÉTRICOS

En primer lugar, antes de abordar la ecuación de la recta y la circunferencia, conviene definir el concepto de **lugar geométrico**, que no es otro sino el que se define como los puntos del plano que verifican una o varias condiciones geométricas.

Estos lugares geométricos cumplen determinadas ecuaciones que en breve describiremos. En este tema estudiaremos dos lugares geométricos básicos: la **recta** y la **circunferencia** que vienen dados por ecuaciones de primer y segundo grado respectivamente.

Muchas veces no nos dan la ecuación, sino simplemente nos dicen “los puntos del plano que cumplen tal propiedad” y tendremos nosotros que encontrar la ecuación.

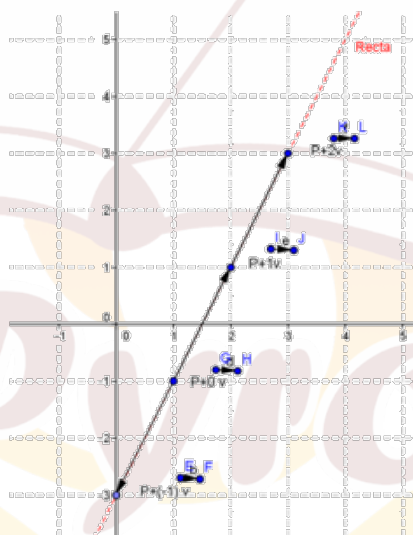
2. ECUACIÓN DE LA RECTA

2.1. DEFINICIÓN

Existen varias maneras equivalentes de definir una recta. La más intuitiva, desde nuestro punto de vista, es la siguiente:

Una **recta** es el lugar geométrico de los puntos del plano que se pueden alcanzar sumando a un punto, múltiplos de un vector. Este vector se llama **vector director**.

Gráficamente se ve bastante más claro. Pensemos en el punto $P = (1, -1)$ y el vector $\vec{v} = (2, 1)$. Al irle sumando múltiplos del vector, vamos obteniendo los infinitos puntos de la recta



Por ejemplo, son puntos de la recta:

$$(1, -1) = (1, -1) + 0\overrightarrow{(2, 1)}$$

$$(5, 0) = (1, -1) + 1\overrightarrow{(2, 1)}$$

$$(3, 0) = (1, -1) + 2\overrightarrow{(2, 1)}$$

2.2. ECUACIÓN VECTORIAL Y ECUACIÓN PARAMÉTRICA

Puede ponerse entonces como $\{(x, y) = (1, -1) + k\overrightarrow{(2, 1)}\}$ donde k es una variable que va tomando todos los valores reales. Esta ecuación se conoce como ecuación vectorial de la recta. Si se pone en vertical, $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -1 + 1k \end{cases}$ se conoce como ecuaciones paramétricas.

Dado un punto $P = (p_1, p_2)$ y un vector director $\vec{v} = (v_1, v_2)$ se llama **ecuación vectorial** a la expresión $\{(x, y) = (p_1, p_2) + k\overrightarrow{(v_1, v_2)}\}$.

Se llama **ecuación paramétrica** a las expresiones $\begin{cases} x = p_1 + k \cdot v_1 \\ y = p_2 + k \cdot v_2 \end{cases}$

Observa que siempre decimos “un vector director”. Y es que hay más de uno, ya sabes, cualquier múltiplo de un vector director (en otras palabras cualquier vector paralelo) es también vector director.

Por ejemplo, si $\overrightarrow{(2, 1)}$ es vector director, también lo son $\overrightarrow{(-2, -1)}$, $\overrightarrow{(4, 2)}$, $\overrightarrow{(10, 5)}$...

Las ecuaciones vectorial y paramétrica (que son prácticamente iguales, como puedes comprobar) son muy útiles si lo que queremos es calcular puntos de la recta.

2.3. ECUACIÓN CONTINUA

Con la ecuación paramétrica o vectorial es muy sencillo obtener puntos, pero no es demasiado sencillo comprobar si un punto pertenece o no a una recta. Por ejemplo, ¿está el punto $(0, 3)$ en la recta $(x, y) = (1, 2) + k\overrightarrow{(3, -3)}$? Para saberlo tendremos que poner $(0, 3)$ en lugar de (x, y) y ver si con el mismo valor de k obtenemos las dos coordenadas. No parece muy sencillo ¿verdad?

Buscamos una ecuación que relacione la x con la y . Para obtenerla despejamos k de las dos ecuaciones y las igualamos.

$$\begin{cases} x = p_1 + k \cdot v_1 \\ y = p_2 + k \cdot v_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - p_1 = k \cdot v_1 \\ y - p_2 = k \cdot v_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x - p_1}{v_1} = k \\ \frac{y - p_2}{v_2} = k \end{cases}$$

Puesto que los segundos miembros son iguales, los primeros miembros también son iguales. De modo que tenemos $\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}$. Esta forma es tan importante que tiene un nombre propio.

Dado un punto $P = (p_1, p_2)$ y un vector director $\vec{v} = (v_1, v_2)$ se llama **ecuación continua** a la expresión:

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}$$

2.4. ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE

El problema de las ecuaciones anteriores es que, aunque representen lo mismo, la expresión no es única ya que una recta tiene muchos puntos y vectores de dirección distintos. Puedes comprobar que $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-3}$ y $\frac{x}{-1} = \frac{y-3}{1}$ son la misma recta pues tienen dos puntos en común. Pero, ¿a qué no lo parece a simple vista?

Para cada vector y cada punto tenemos una ecuación continua distinta. Vamos a empezar a eliminar la parte que dependa del vector.

Si multiplicamos en la ecuación continua por el denominador de la y obtenemos $\frac{v_2}{v_1}(x - p_1) = y - p_2$.

Lo primero, tenemos que notar que $\frac{v_2}{v_1}$ es siempre constante, independientemente del vector que elijamos ya que si dos vectores tienen la misma dirección verifican que $k = \frac{v_2}{w_2} = \frac{v_1}{w_1}$, donde k es la pendiente del vector. La pendiente de la recta se calcula como la de cualquiera de sus vectores.

Se llama **pendiente de una recta** a la pendiente de un vector director suyo. El resultado es el mismo para cualquiera de los vectores directores de la recta. La pendiente puede ser positiva o negativa.

En el caso $v_1 = 0$, la recta es vertical y su ecuación es $x = b$.

Otras maneras equivalentes de definir la pendiente:

1. La pendiente son las unidades de subida (si es positiva) o bajada (si es negativa) por cada unidad que nos movemos en horizontal. Esta es la definición que se usa en las señales de tráfico (expresada en tanto por ciento).
2. La pendiente es la tangente del ángulo que forma un vector con la horizontal. Si el ángulo es en sentido negativo (es decir, hacia abajo) es negativa.

Volvamos pues a la ecuación que teníamos, $\frac{v_2}{v_1}(x - p_1) = y - p_2$. Si llamamos $m = \frac{v_2}{v_1}$ a la pendiente tenemos otra ecuación:

Dado un punto $P = (p_1, p_2)$ y un número m se llama **ecuación punto-pendiente** a la expresión:

$$y - p_2 = m(x - p_1)$$

Observa que esta expresión NO es única, porque depende del punto. Pero ya no depende del vector.

Así, $y - 2 = 3(x - 1)$ da la misma recta que $y - 5 = 3(x - 1)$ pero la pendiente será siempre la misma.

2.5. ECUACIÓN GENERAL O IMPLÍCITA

Si en la ecuación continua hacemos operaciones $\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2}$, de modo que haya sólo un coeficiente para el término independiente x e y e igualemos a 0, obtenemos la ecuación implícita, también llamada ecuación general. Con más detalle:

Multiplicando en cruz: $\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2} \rightarrow v_2(x - p_1) = v_1(y - p_2)$.

Operando: $v_2 \cdot x - v_2 \cdot p_1 = v_1 \cdot y - v_1 \cdot p_2 \rightarrow v_2 \cdot x - v_1 \cdot y + (v_1 \cdot p_2 - v_2 \cdot p_1) = 0$.
Basta cambiarles el nombre a los coeficientes: $A = v_2$, $B = -v_1$, $C = v_1 \cdot p_2 - v_2 \cdot p_1$.

Dados tres números A , B , C se llama **ecuación general o implícita** de una recta a la expresión:

$$Ax + By + C = 0$$

Se trata de una ecuación lineal con dos variables (x e y). Las infinitas soluciones de esta ecuación son los puntos de la recta que estamos describiendo. Hay que tener en cuenta que puede haber todas las ecuaciones lineales que queramos que representen la misma recta, basta con multiplicar todos los términos de la misma por un mismo número para obtener una ecuación equivalente. Por ejemplo $2x + 2y - 4 = 0$ representa la misma recta que $x + y - 2 = 0$.

2.6. VECTOR DIRECTOR

Si tenemos la ecuación de una recta en la forma implícita, podemos calcular el vector director directamente.

Sea $Ax + By + C = 0$: Observa que pasando la “ y ” al otro lado, $Ax + C = -By$ con lo que la forma continua de esa recta es $\frac{x + \frac{C}{A}}{-B} = \frac{y}{A}$ y su vector director es $\overrightarrow{(-B, A)}$.

Si la recta es $Ax + By + C = 0$ un **vector director** es $\overrightarrow{(-B, A)}$.

El vector $\vec{n} = (A, B)$ se llama **vector normal**, que como puedes ver es perpendicular a la recta.

2.7. VECTOR PERPENDICULAR

Dada una recta en el plano cartesiano con ecuación general de la forma $Ax + By + C = 0$ se define un vector perpendicular a la recta como el vector normal:

$$v_{\perp} = (A, B)$$

Este vector es perpendicular además a todos los vectores paralelos a la recta inicial.

EXPLICACIÓN CONCEPTUAL

Para entender por qué el vector (A, B) es perpendicular a la recta, consideremos lo siguiente:

1. Vector director de la recta:

- Una recta en el plano tiene una dirección determinada por su pendiente.

- Un **vector director** de la recta es un vector que indica su orientación y puede obtenerse a partir de la ecuación despejada en forma explícita $y = mx + b$, donde la pendiente es $m = -\frac{A}{B}$.
- Un **vector paralelo** a la recta puede escribirse como $v = (B, -A)$.

2. Vector perpendicular:

- Un vector es **perpendicular** a otro si el producto escalar entre ambos es cero:

$$v \cdot v_{\perp} = B \cdot A + (-A) \cdot B = 0$$

- Como el vector (A, B) cumple con esta propiedad respecto al vector director, se confirma que es un **vector perpendicular** a la recta.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Si visualizamos una recta en el plano, podemos identificar dos vectores asociados:

- Un vector director $(B, -A)$, que es paralelo a la recta.
- Un vector normal (A, B) , que apunta en una dirección perpendicular a la recta.

El vector normal es clave en muchas aplicaciones, como el cálculo de distancias entre puntos y rectas, la definición de planos en tres dimensiones y el trazado de perpendiculares.

Ejemplo:

Dada la recta:

$$4x - 3y + 7 = 0$$

El vector perpendicular a esta recta es:

$$v_{\perp} = (4, -3)$$

Esto significa que cualquier línea con dirección $(4, -3)$ formará un ángulo recto con la recta dada.

APLICACIONES DEL VECTOR PERPENDICULAR

1. Cálculo de la distancia de un punto a una recta

- Se usa la proyección sobre el vector perpendicular para determinar la distancia mínima.

2. Construcción de rectas perpendiculares

- Para trazar una recta perpendicular a una dada en un punto específico, se usa su vector normal.

3. Definición de planos en el espacio tridimensional

- En tres dimensiones, el vector normal a un plano define su orientación en el espacio.

4. Análisis de fuerzas en física

- En mecánica y estática, los vectores normales representan direcciones de reacción en superficies de contacto.

2.8. ECUACIÓN EXPLÍCITA

Vamos finalmente a dar una ecuación que sí es siempre única. Si en la ecuación punto-pendiente despejamos la y tenemos la expresión que buscamos:

$y - p_2 = m(x - p_1) \rightarrow y = mx - mp_1 + p_2$. Si llamamos $n = -mp_1 + p_2$ obtenemos la ecuación $y = mx + n$ que es la ecuación de la recta vista como una función.

Dados dos números m y n se llama **ecuación explícita** de una recta a la expresión:

$$y = mx + n$$

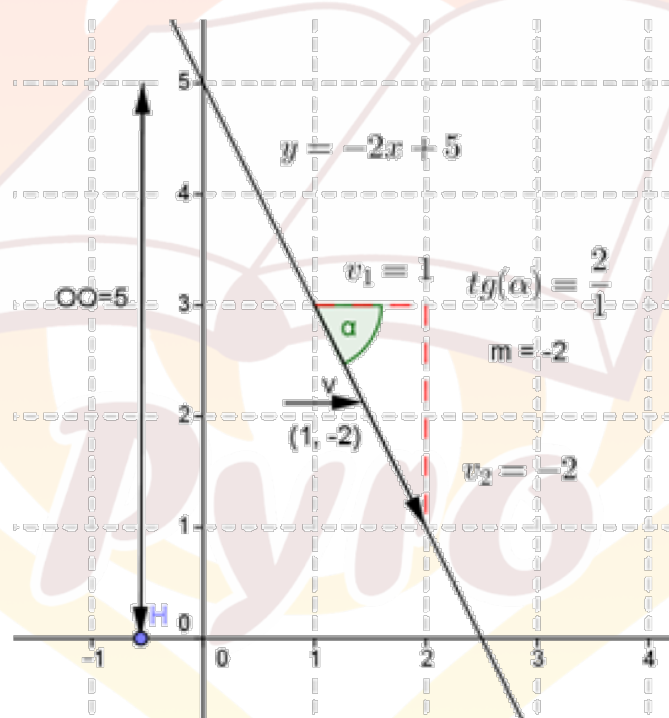
El número m es la pendiente y el número n es la ordenada en el origen.

Ya hemos visto que m es la pendiente. ¿Qué es pues n ? Es claro que es el valor de y cuando sustituimos x por 0 puesto que $y = m \cdot 0 + n = n$. De ahí el nombre, puesto que cuando x está en el origen (el 0) la ordenada de ese punto es n .

De lo anterior vemos que la recta pasa por el punto $(0, n)$. Otra manera de ver la ordenada en el origen es el valor de y al cruzar la recta el eje OY.

En el dibujo podemos ver cómo la recta $y = -2x + 5$ tiene $m = -2$ como pendiente y $n = 5$ como ordenada en el origen (OO en el dibujo).

Observa que, si m es la pendiente, un vector director es SIEMPRE $(1, m)$.



2.9. RESUMEN

Acabamos de ver un montón de ecuaciones de la recta y hemos visto brevemente cómo se pasa de una a otra (realmente sólo en un sentido). Es el momento de recopilar lo que tenemos y ver cómo aplicarlo para resolver problemas.

Aplicaremos el siguiente **principio fundamental**: si una recta se expresa en una determinada forma matemática, los valores en esa ecuación representan elementos característicos de la recta, como puntos y vectores. Dicho de otra manera, cada forma de ecuación de una recta nos da información específica sobre sus propiedades.

1. Si la recta tiene de ecuación $\begin{cases} x = p_1 + k \cdot v_1 \\ y = p_2 + k \cdot v_2 \end{cases}$ automáticamente (p_1, p_2) es un punto de la recta y (v_1, v_2) es un vector. Esta es la extracción de elementos de la forma **paramétrica**.
2. Si la recta tiene de ecuación $\frac{x-x_1}{v_1} = \frac{y-x_2}{v_2}$ automáticamente (x_0, y_0) es un punto de la recta y (v_1, v_2) es un vector. Esta es la extracción de elementos de la forma **continua**.
3. Si la recta tiene de ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$ automáticamente m es la pendiente y (x_0, y_0) es un punto. Esta es la extracción de elementos de la forma **punto-pendiente**.
4. Si la recta tiene de ecuación $Ax + By + C = 0$ automáticamente (A, B) es un vector perpendicular a la recta. Esta es la extracción de elementos de la forma **implícita**.
5. Si la recta tiene de ecuación $y = mx + n$ automáticamente m es la pendiente y n es la

2.10. FÓRMULAS PARA LOS PROBLEMAS MÉTRICOS

Hasta ahora hemos ido construyendo las herramientas para resolver problemas de geometría. Vamos a dedicar este apartado a recapitular lo que ya tenemos y dar algunas indicaciones sobre cómo resolver problemas. Plantearemos a continuación, algunos problemas típicos.

Recapitulando las cosas que ya hemos tratado:

- Calcular **distancias** entre dos puntos (módulo del vector que une los puntos).
- Ángulo entre **rectas** (ángulo entre sus vectores con el producto escalar).
- Calcular ángulos en triángulos (**ángulo entre los vectores** con producto escalar).
- Calcular ecuaciones de **rectas** (busca un punto y un vector y aplica la forma vectorial o continua).
- Posiciones relativas de **rectas** (Resuelve el sistema para hallar el punto de intersección).

2.10.1. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Dados dos puntos $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$, la distancia d entre ambos responde a la formula:

$$d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

2.10.2. DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UNA RECTA

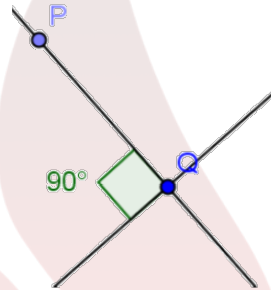
La distancia entre un punto y una recta es la mínima distancia que hay entre el punto y cualquiera de los puntos de la recta. Si P es el punto y r es la recta se representa por $d(P, r)$.

Por lo tanto, dada una recta r y un punto exterior a ella P , la distancia del punto a la recta es:

$$d(P, r) = \min \{d(P, Q) : Q \in r\}$$

En base a esto, vamos a considerar una propiedad que resulta bastante obvia intuitivamente:

Dada una recta r y un punto exterior a ella P , el punto Q de mínima distancia es el que cumple que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a la recta.



La fórmula general para la distancia de un punto a una recta es la siguiente:

La **distancia entre un punto** $P = (x_0, y_0)$ y una **recta** $r \equiv \{Ax + By + C = 0\}$ se calcula:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

2.10.3. DISTANCIA ENTRE UNA RECTA Y EL ORIGEN

La **distancia del origen** o punto $(0,0)$ a la **recta** $r \equiv \{Ax + By + C = 0\}$ viene dada por:

$$d(O, r) = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

2.10.4. DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS

En este caso pueden darse dos situaciones:

1. **Que las dos rectas se corten o sean coincidentes.** En este caso $d(r, s) = 0$
2. **Que las dos rectas sean paralelas.** Para hallar la distancia entre ellas, se calcula un punto de una de ellas y se aplica la fórmula de la distancia entre dicho punto y la otra recta.

La **distancia entre dos rectas paralelas** $r \equiv \{Ax + By + C = 0\}$ y $s \equiv \{A'x + B'y + C' = 0\}$:

$$d(r, s) = d(P, s) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C' - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

siendo P un punto de la recta r .

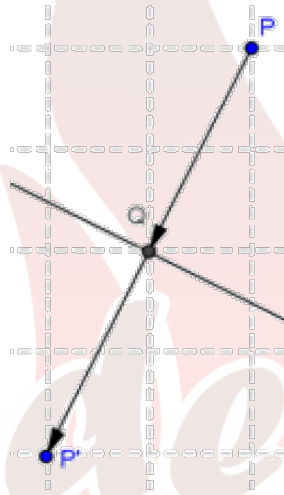
2.10.5. PUNTO MEDIO ENTRE DOS PUNTOS

Dados dos puntos $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$, su punto medio es $M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$

2.10.6. PUNTO SIMÉTRICO

Dada una recta r y un punto P exterior a ella el simétrico, P' , es un punto situado a la misma distancia de la recta y de forma que el vector $\overrightarrow{PP'}$ perpendicular a la recta.

El punto P' **simétrico** de P respecto a la recta r es igual a $P' = Q + \overrightarrow{PQ}$ siendo Q el punto de r de mínima distancia a P .



2.10.7. MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

La **mediatriz** de un segmento AB es el lugar geométrico de los puntos, $P(x, y)$, que equidistan de los extremos del segmento, es decir:

$$d(P, A) = d(P, B)$$

Para encontrar la ecuación de la mediatriz realizamos los pasos:

1. La distancia de un punto $P(x, y)$ en la mediatriz a cada uno de los extremos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ del segmento, es la misma: $d(P, A) = d(P, B)$
2. Escribimos en términos de las coordenadas de A , B y P

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$$

3. Igualamos los radicandos y simplificamos para obtener la ecuación de la mediatriz.

Veámoslo con un ejemplo:

Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $A(2, 5)$ y $B(4, -7)$.

1. La distancia de un punto $P(x, y)$ en la mediatriz a cada uno de los extremos $A(2, 5)$ y $B(4, -7)$ del segmento, es la misma: $d(P, A) = d(P, B)$
2. Escribimos en términos de las coordenadas de A , B y P :

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-(-7))^2}$$

3. Igualamos los radicandos y simplificamos para obtener la ecuación de la mediatriz:

$$(x-2)^2 + (y-5)^2 = (x-4)^2 + (y+7)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = x^2 - 8x + 16 + y^2 + 14y + 49$$

$$4x - 24y - 36 = 0$$

4. Simplificamos la última ecuación obtenida y esta es la ecuación de la mediatriz:

$$x - 6y - 9 = 0$$

3. ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

3.1. DEFINICIÓN

Vamos a continuar con la circunferencia, la cual viene dada por ecuaciones de segundo grado (en x e y). Este lugar geométrico es un caso particular del grupo de las cónicas, denominadas así porque se pueden obtener cortando un cono por un plano.

Dado un punto cualquiera $P = (p_1, p_2)$ llamado **centro**, y una distancia r llamada **radio**, una **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos que están a distancia r de P.

3.2. ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

3.2.1. ECUACIÓN CANÓNICA, ECUACIÓN REDUCIDA O ECUACIÓN ORDINARIA

Vamos a calcular la ecuación de la circunferencia. ¿Cuándo un punto (x, y) pertenece a la circunferencia? Pues cuando está a distancia r de (p_1, p_2) . Lo único que tenemos que hacer es insertar la fórmula de la distancia.

$$d[(x, y), (a, b)] = r \text{ significa } \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Una circunferencia de centro (a, b) y radio r tiene por ecuación $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Esta ecuación a veces se llama **ecuación canónica**, **ecuación reducida** o **ecuación ordinaria**.

3.2.2. ECUACIÓN GENERAL

Partiendo de la ecuación ordinaria, si desarrollamos los binomios al cuadrado:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

A continuación, si reagrupamos los términos de la siguiente manera:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Y consideramos los siguientes cambios:

$$A = -2a \quad B = -2b \quad C = a^2 + b^2 - r^2$$

Dicha ecuación de la circunferencia puede escribirse de la siguiente manera:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

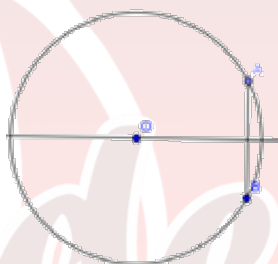
Se denomina **ecuación general** de la circunferencia a aquella escrita de la siguiente forma:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

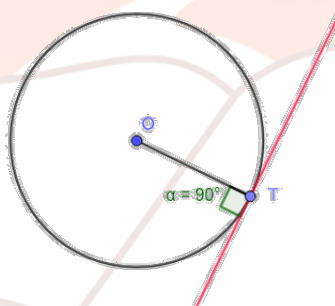
Siendo $A = -2a$, $B = -2b$ y $C = a^2 + b^2 - r^2$ con a y b coordenadas del centro de la circunferencia.

3.3. PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA

1. Si se toman dos puntos en una circunferencia, su mediatriz pasa por el centro.



2. Si tomamos un punto A en una circunferencia, la tangente a la circunferencia por ese punto es perpendicular al radio que le corresponde.

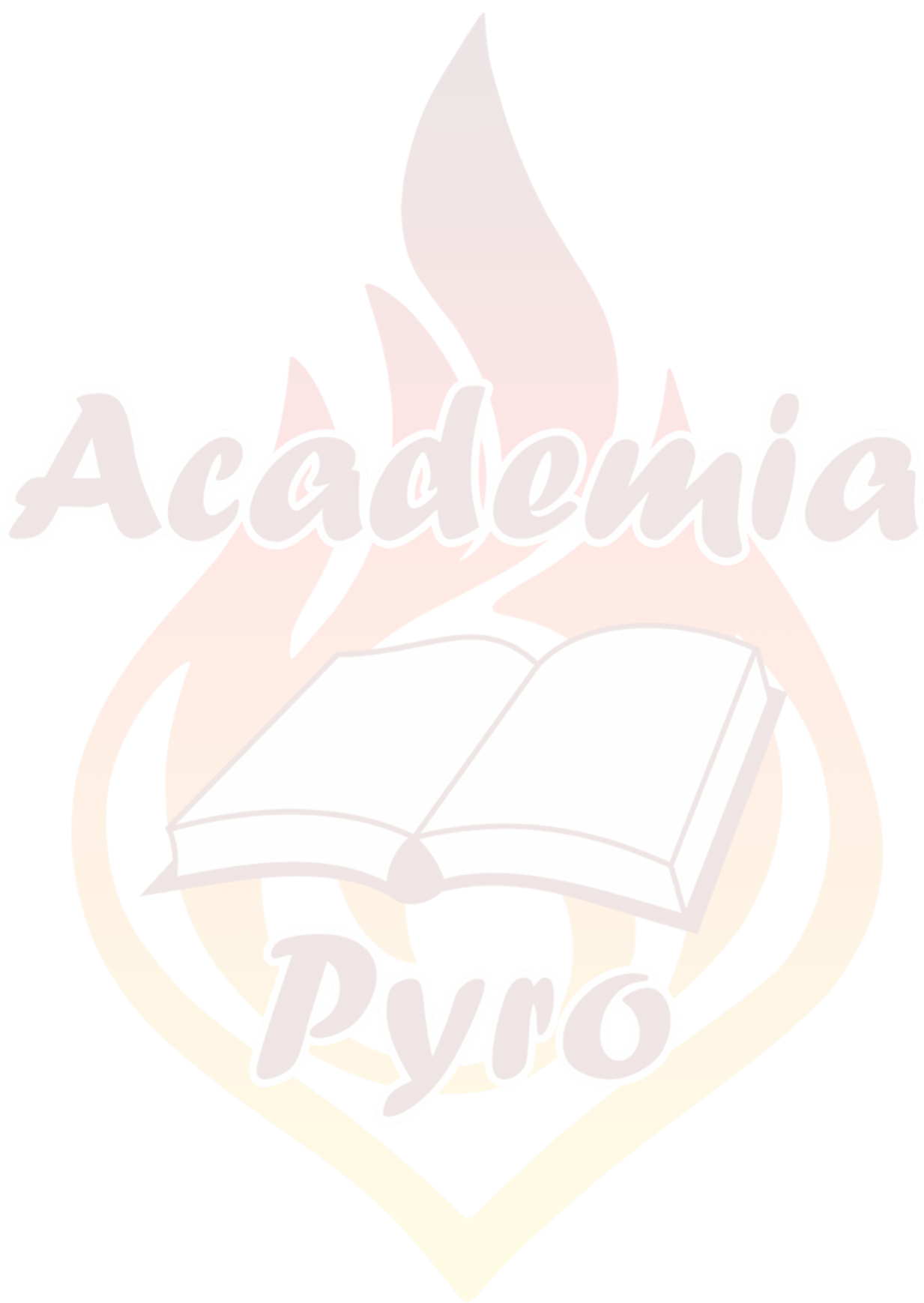


3. Conocido tres puntos de la circunferencia podemos calcular la misma (su centro es el circuncentro del triángulo que forman).

3.4. CÓMO RECONOCER UNA CIRCUNFERENCIA

Suponemos que nos dan una ecuación general del tipo $2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y = 0$ y nos preguntan a qué lugar geométrico corresponde. Debemos intentar que se parezca a algo conocido. Para ello, seguimos el siguiente método.

1. Dividimos por el coeficiente común de x^2 e y^2 (si el coeficiente no es común se trata de otro lugar geométrico): $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$.
2. Completamos los cuadrados para que quede $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + A = 0$: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 - 4 - 1 = 0$.
3. Pasamos el número " A " al otro término, siendo $-A$ el radio al cuadrado (obviamente ha de ser positivo si no es una circunferencia compleja, es decir no real): $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$.



Anexo I

Vectores y puntos en el plano

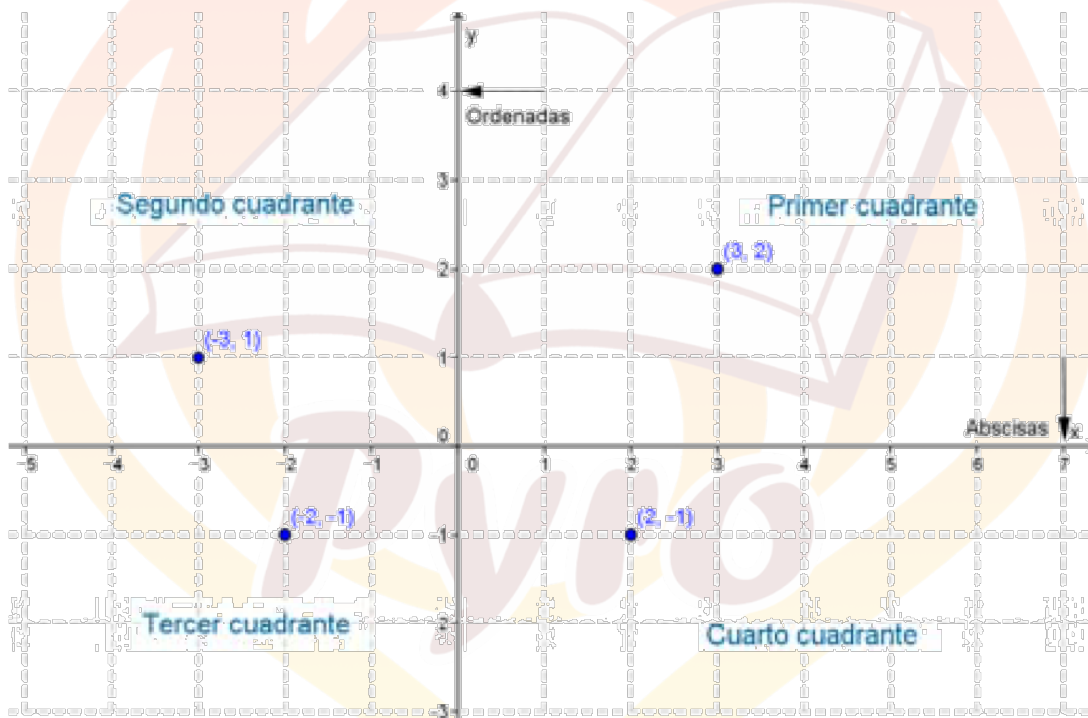
En el temario de la oposición no hay ningún tema que trate el tema de los vectores y para este tema es conveniente tener unas nociones básicas de los mismos.

EL PLANO CARTESIANO

Para representar los lugares geométricos que hemos estudiado hemos usado el **plano cartesiano**. Dicho sistema de representación consiste en dos rectas numéricas perpendiculares, llamadas **ejes coordenados**. El punto en el que se cortan los ejes, O, es el **origen de coordenadas**.

Normalmente lo representamos con un eje vertical y el otro horizontal. Al eje horizontal lo denominamos **eje de abscisas** o también eje OX y al vertical, **eje de ordenadas** o eje OY. Al cortarse los dos ejes, el plano queda dividido en cuatro zonas, que se conocen como cuadrantes:

- Primer cuadrante: Zona superior derecha ($x > 0$ e $y > 0$)
- Segundo cuadrante: Zona superior izquierda ($x < 0$ e $y > 0$)
- Tercer cuadrante: Zona inferior izquierda ($x < 0$ e $y < 0$)
- Cuarto cuadrante: Zona inferior derecha ($x > 0$ e $y < 0$)



PUNTO EN EL PLANO CARTESIANO

Un **punto** en el plano cartesiano se denota por sus coordenadas (x, y). Estas coordenadas indican la posición exacta del punto con respecto a los ejes x e y. Por ejemplo, el punto (3, 2) se encuentra a tres unidades a la derecha del origen y dos unidades hacia arriba.

Para ubicar un punto en el plano:

1. **Determinar las coordenadas:** Identificar el valor de x (abscisa) e y (ordenada).
2. **Trazar una línea vertical:** Desde el valor de x hasta intersectar la línea horizontal del valor de y .
3. **Marcar el punto de intersección:** Este punto es la ubicación deseada en el plano.

Los puntos pueden ser utilizados para definir figuras geométricas, como líneas, triángulos, y polígonos, y son esenciales en la representación gráfica de funciones matemáticas.

VECTORES EN EL PLANO CARTESIANO

Un **vector** en el plano es una entidad matemática que tiene magnitud (longitud), dirección y sentido. Los vectores se representan gráficamente como flechas, donde la longitud de la flecha indica la magnitud, la dirección de la flecha muestra hacia dónde apunta el vector, y el sentido es indicado por la punta de la flecha.

COMPONENTES DE UN VECTOR

Un vector puede ser definido por sus componentes:

- **Vector $\vec{v}$:** Representado como $\vec{v} = (v_x, v_y)$, donde v_x y v_y son las componentes en las direcciones x e y , respectivamente.
- **Vector de posición:** Si el vector se origina en el origen y termina en el punto (x, y) , se escribe como $\vec{r} = (x, y)$.

MAGNITUD, DIRECCIÓN Y SENTIDO

- **Magnitud:** La longitud de un vector $\vec{v} = (v_x, v_y)$ se calcula como $|\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$. Representa la "fuerza" o "intensidad" del vector.
- **Dirección:** La dirección de un vector se puede determinar mediante el ángulo θ que forma con el eje x .
- **Sentido:** El sentido de un vector es hacia dónde apunta la flecha, lo cual puede ser descrito por el signo de sus componentes.

OPERACIONES CON VECTORES

Los vectores pueden ser sumados, restados y multiplicados por un escalar:

- **Suma de vectores:** $\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)$.
- **Resta de vectores:** $\vec{u} - \vec{v} = (u_x - v_x, u_y - v_y)$.
- **Multiplicación por un escalar:** $k \cdot \vec{v} = (k \cdot v_x, k \cdot v_y)$, donde k es un escalar.

PROPIEDADES DE LOS VECTORES

1. **Vectores paralelos:** Dos vectores son paralelos si uno es un múltiplo escalar del otro. Es decir, $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$.
2. **Vectores unitarios:** Un vector unitario es un vector con magnitud igual a 1. Se obtiene dividiendo un vector por su magnitud: $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.
3. **Producto escalar:** El producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es un número dado por $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$. Este producto es útil para determinar el ángulo entre dos vectores.
4. **Producto vectorial:** Aunque no se usa tanto en el plano bidimensional, en tres dimensiones el producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ produce un vector perpendicular a ambos.
5. **Vectores perpendiculares:** Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es 0, es decir, $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y = 0$.

APLICACIONES DE LOS VECTORES

Los vectores son fundamentales en muchas áreas de la matemática y las ciencias, ya que permiten describir desplazamientos, fuerzas, y muchas otras cantidades físicas en términos de sus componentes y dirección. En física, por ejemplo, los vectores son esenciales para describir la velocidad, aceleración y fuerza. En la ingeniería, los vectores se utilizan para modelar fuerzas y movimientos.

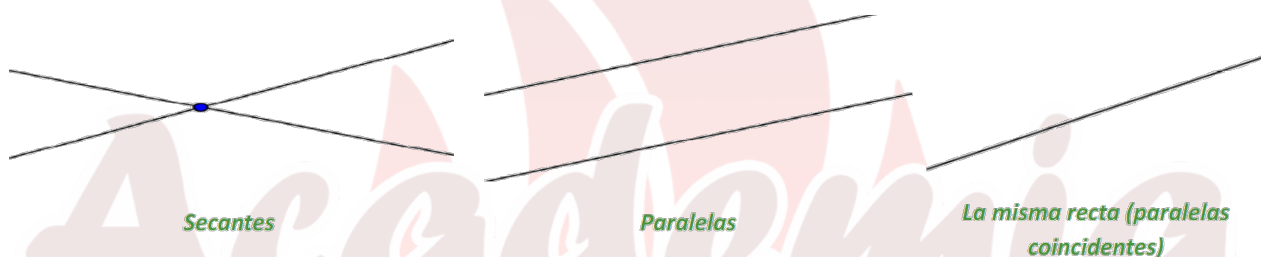
Anexo II

Posición relativa entre dos rectas

Las posiciones relativas de dos rectas se pueden estudiar desde dos puntos de vista, el geométrico y el analítico.

Desde el punto de vista geométrico, las posiciones de dos rectas en el plano son sencillas.

1. Rectas **secantes**, cuando las rectas se cortan. Es decir, tienen un único punto en común.
2. Rectas **paralelas** si no tiene ningún punto en común y tienen misma pendiente.
3. Rectas **coincidentes** cuando son la misma recta (infinitos puntos en común).



¿Cómo distinguir esos casos? Vamos a dar varios métodos para hacerlo.

MÉTODO 1: CON VECTORES DIRECTORES

Es claro que dos rectas son paralelas o iguales si (y solamente si) sus vectores son paralelos. A su vez, si son paralelas no tienen puntos en común y si son coincidentes los tienen todos. Eso sugiere el siguiente método:

1. Calcular los vectores directores de las dos rectas. Si NO son paralelos, son secantes.
2. Si los vectores son paralelos, tomar un punto cualquiera de una recta y ver si es punto de la otra. Si lo es, son coincidentes. Si no, son paralelas.

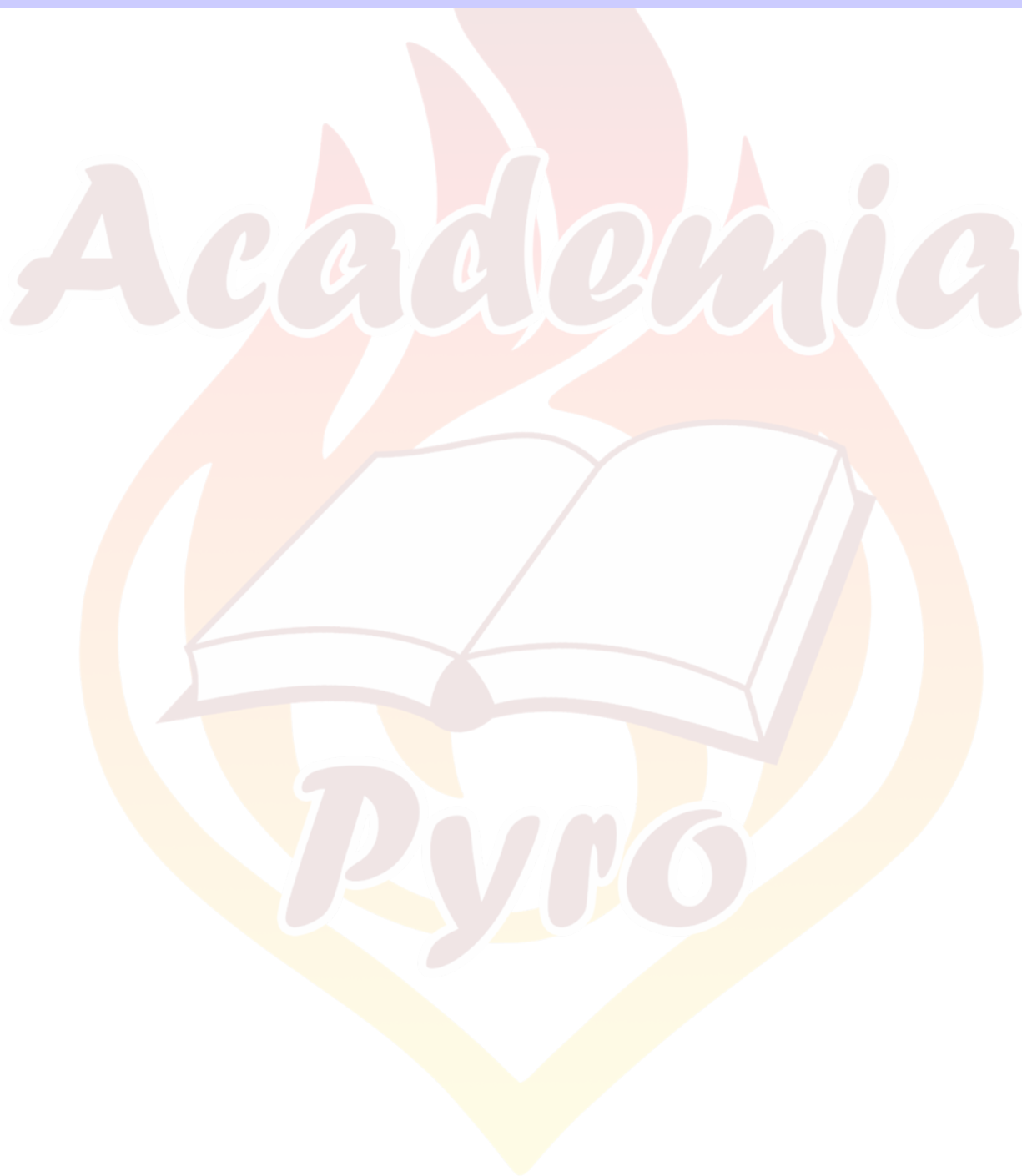
MÉTODO 2: ANALIZANDO Y RESOLVIENDO EL SISTEMA

Si pasamos las dos rectas a forma general o implícita tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. El sistema
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$
 puede ser:

1. Compatible determinado $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ (si multiplicas en cruz puedes darte cuenta que $m_1 \neq m_2$). Hay una única solución (punto de corte), por tanto, las rectas son secantes.
2. Compatible indeterminado $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ (ecuaciones proporcionales). Infinitas soluciones, por tanto, las rectas son la misma recta o rectas coincidentes.
3. Incompatible $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ (misma pendiente, pero distintas ecuaciones). No hay soluciones, por tanto, las rectas son paralelas.

En resumen, el método es:

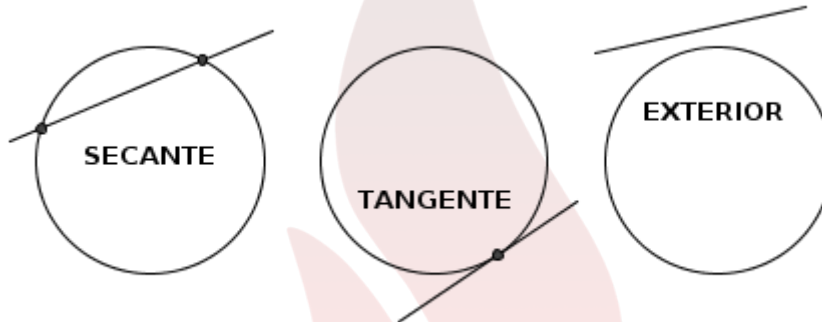
1. Escribir las dos rectas en forma general (cualquier forma excepto vectorial o paramétrica).
2. Intentar resolver el sistema.
3. Tenemos tres casos:
 - a) Si sale un punto: **SECANTES**.
 - b) Si sale $0 = 0$: **LA MISMA RECTA**.
 - c) Si sale $1 = 0$ **PARALELAS**



Anexo III

Posición relativa entre una recta y una circunferencia

La posición relativa de una recta respecto a una circunferencia es una de las siguientes:



1. Recta **secante**: corta a la circunferencia en dos puntos.
2. Recta **tangente**: tiene un único punto en común con la circunferencia.
3. Recta **exterior** a circunferencia: no tiene puntos en común con la circunferencia.

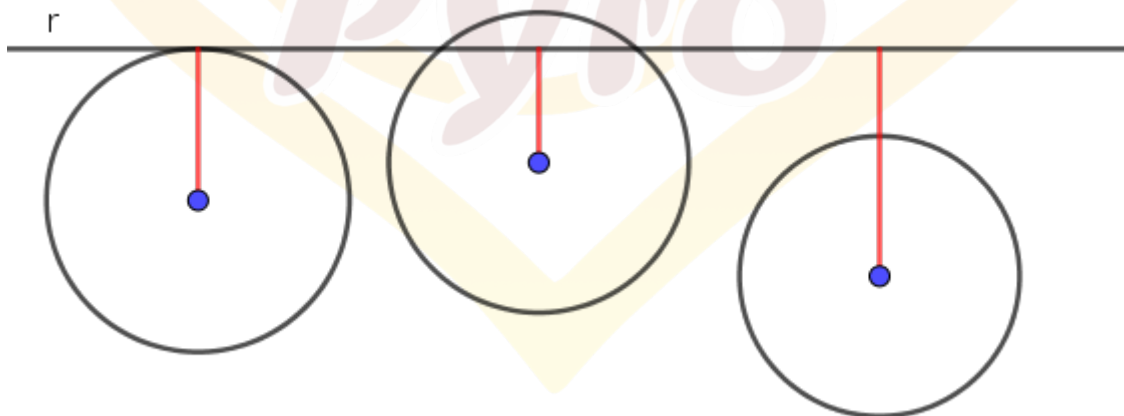
Si tenemos las ecuaciones de una recta y de una circunferencia podemos calcular su posición relativa por varios métodos:

Método 1: resolviendo el sistema

Resolvemos el sistema no lineal formado por la ecuación de la recta y la ecuación de la parábola y miramos el número de soluciones:

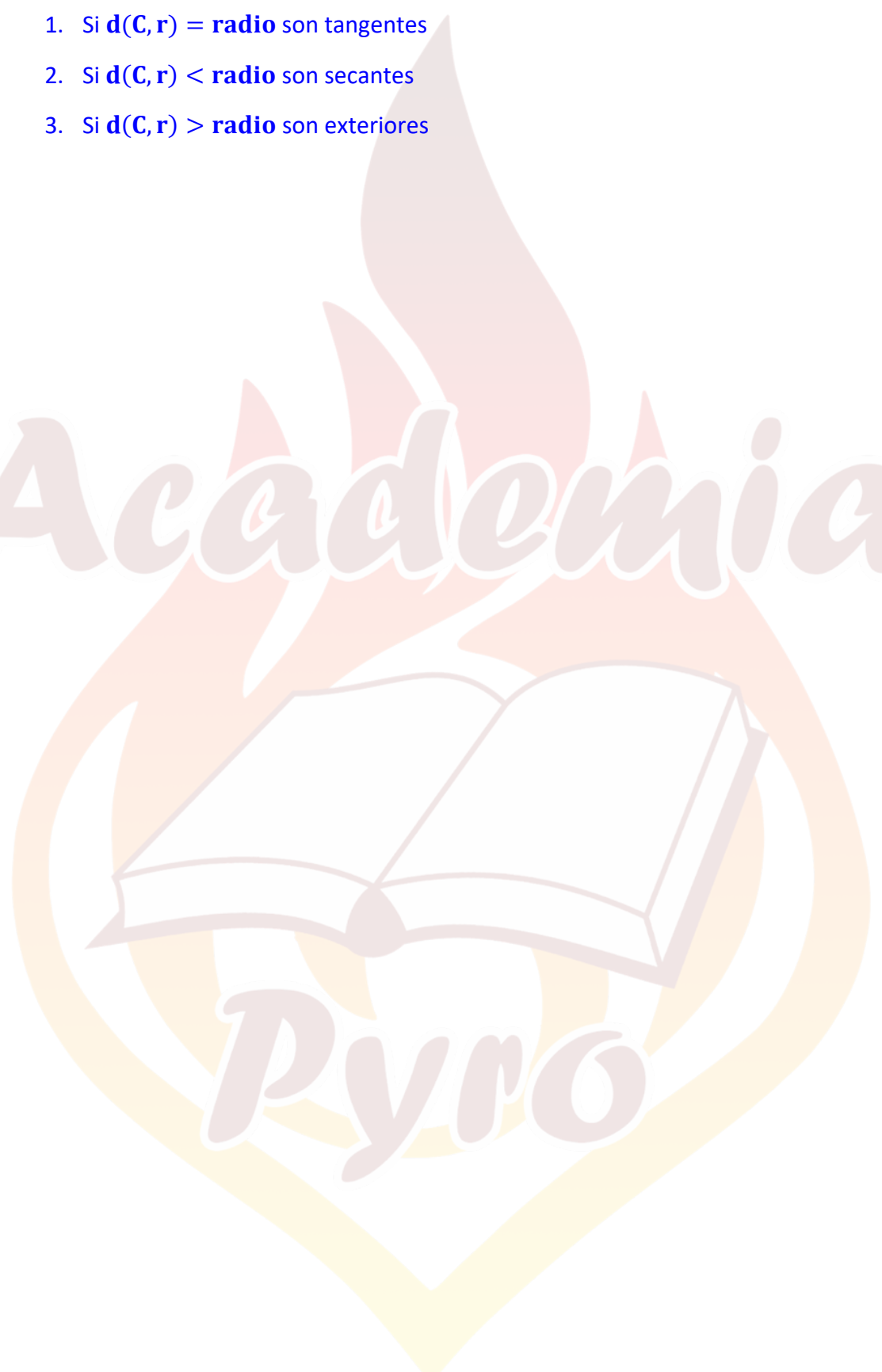
1. **Sin solución** (no tienen puntos en común): son **exteriores**
2. **Una solución** (tienen un punto en común): son **tangentes**.
3. **Dos soluciones** (tienen dos puntos en común): son **secantes**

Método 2: calculando la distancia del centro a la recta



Calculamos la distancia entre el Centro de la circunferencia y la recta. Para ello podemos usar la fórmula de la distancia de un punto a una recta.

1. Si $d(C, r) = \text{radio}$ son tangentes
2. Si $d(C, r) < \text{radio}$ son secantes
3. Si $d(C, r) > \text{radio}$ son exteriores



Academia

Pyro