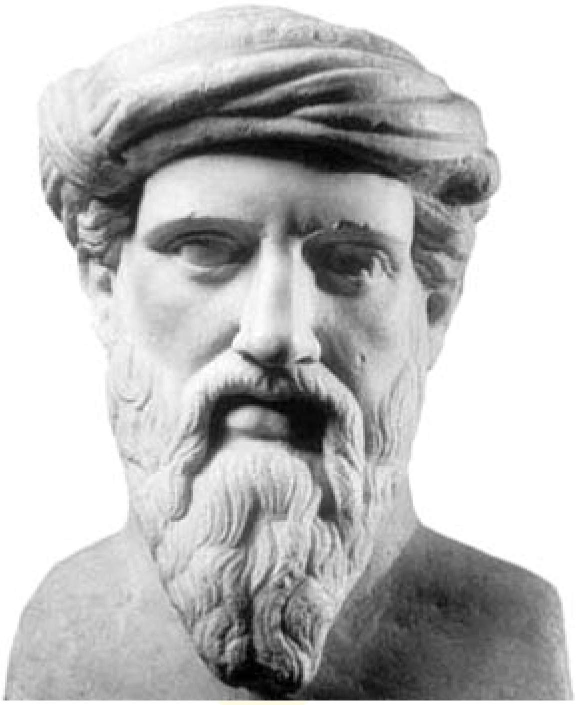
MATEMÁTICAS

TEMA 6

TRIGONOMETRÍA. MEDIDA DE ÁNGULOS. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS. ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS. ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.



“La geometría revela las proporciones divinas que gobiernan el universo.”

Pitágoras de Samos (570 a.C.- 490 a.C.)

1. TRIGONOMETRÍA

1.1. ¿QUÉ SIGNIFICA LA PALABRA TRIGONOMETRÍA?

La palabra **trigonometría** significa "medición de triángulos". Es una de las disciplinas de las Matemáticas más antiguas. Hay tablillas babilónicas del siglo XX antes de Cristo y papiros egipcios del XVII a.C. que tratan temas de trigonometría.

1.2. ¿QUÉ ES LA TRIGONOMETRÍA?

La **trigonometría** es la parte de la matemática que se encarga de estudiar y medir los triángulos, las relaciones entre sus ángulos y lados, y las funciones trigonométricas de seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

1.3. ¿PARA QUÉ SE USA LA TRIGONOMETRÍA?

Esta rama matemática se relaciona, directa o indirectamente, con otras áreas científicas, y se aplica a todo aquello que requiera de medidas de precisión, como la geometría espacial y la astronomía para la medición de las distancias entre estrellas respecto a otros puntos geográficos.

La aplicación de las funciones trigonométricas en la física, astronomía, telecomunicaciones, náutica, ingeniería, cartografía, entre otros ámbitos, es lo que las dota de relevancia, pues permiten calcular distancias con precisión sin tener que, necesariamente, recorrerlas.

Sabiendo esto, la importancia de la trigonometría radica en las **diversas aplicaciones** que tiene para, por ejemplo:

- Calcular la distancia entre dos puntos, de los cuales uno, o incluso ambos, son inaccesibles.
- Calcular de forma precisa distancias y ángulos de inclinación, siendo de gran utilidad para la ingeniería civil.
- Calcular la altura de un punto en pie que puede ser, también, inaccesible.

1.4. ¿CUÁLES SON LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS?

Se entiende por **funciones trigonométricas** a la relación métrica entre los lados de un triángulo rectángulo. A partir de un triángulo que presente un ángulo recto de 90 grados se pueden determinar tres **elementos fundamentales**:

- **Ángulos:** área del plano que se encuentra entre dos semirrectas con origen común. Se trata de la amplitud del arco de una circunferencia, centrada en el vértice y delimitada por sus lados.
- **Catetos:** resto de lados que conforman un triángulo. Se pueden clasificar en cateto opuesto (que se encuentra del lado opuesto o en frente del ángulo estudiado) y el adyacente (que se encuentra junto al ángulo analizado).
- **Hipotenusa:** lado de mayor longitud de un triángulo y está opuesto al ángulo recto.

2. MEDIDA DE ÁNGULOS

Cuando se estudia la medida de los ángulos, así como su cálculo, la trigonometría se vale de las siguientes unidades:

- **Radián:** unidad angular básica en trigonometría que indica la relación que existe entre el ángulo que se forma a partir del radio de una circunferencia y un arco que tenga la misma longitud. Una circunferencia completa está conformada por dos radianes.
- **Grado sexagesimal:** unidad angular que divide una circunferencia en 360 grados, considerando que cada ángulo recto posee 90 grados y si se divide la circunferencia a cuatro partes iguales, la suma de cada ángulo dará un total de 360. Se suele utilizar en el campo práctico de ramas como la ingeniería, arquitectura o la física.
- **Grado centesimal:** unidad angular que divide una circunferencia en 400 grados centesimales.
- **Mil angular:** unidad que divide la circunferencia en 6.400 unidades.

En el sistema sexagesimal de medida de ángulos, la unidad es el grado sexagesimal que se divide en minutos que es la sesenteava parte de un grado y el segundo que es la sesenteava parte de un minuto.

El radián es un ángulo tal que cualquier arco que se le asocie mide exactamente lo mismo que el radio utilizado para trazarlo. Se denota por rad.

La unidad de medida de ángulos en el Sistema Internacional es el radián. Puesto que a un ángulo completo le corresponde un arco de longitud 2πR, a un radián un arco de longitud R, entonces:

$$\text{Nº de radianes de un ángulo completo} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi \text{ radianes}$$

Y la relación con el sistema sexagesimal la obtenemos a partir del ángulo completo:

$$\text{ángulo completo} = 360° = 2\pi \text{ rad} \leftrightarrow \text{ángulo llano} = 180° = \pi \text{ radianes}$$

Por esta relación se obtiene que 1 rad ≅ 57, 216° ≅ 57° 12’ 58’’.

Podríamos por tanto haber definido el radián de otra manera totalmente equivalente, a partir de los grados.

$$\text{Un radián son} \frac{180}{\pi} \text{ grados sexagesimales}$$

¿Por qué se usa π para medir ángulos siendo un numero irracional? Hay dos razones:

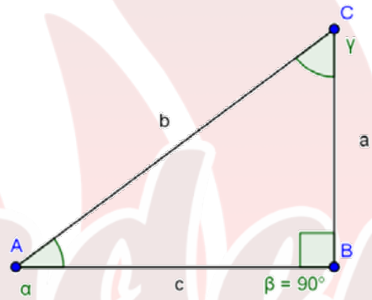
1. Con radianes es muy fácil transformar longitudes en ángulos y viceversa. Con grados es un poco más complicado (tampoco mucho).
2. En el caso de las derivadas, las funciones trigonométricas se expresan en radianes. Esto es así porque las derivadas salen más sencillas.

3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

3.1. NOTACIÓN DE LAS PARTES DE UN TRIÁNGULO

Para definir cuáles son las **razones trigonométricas**, vamos a establecer en primer lugar una notación para referirnos a cada una de las partes del triangulo rectángulo.

Los vértices de un triángulo los representaremos con letras mayúsculas, empezando el alfabeto (A, B, C). El lado opuesto a cada vértice lo representaremos con la letra minúscula correspondiente a dicho vértice (a, b, c). A su vez el ángulo correspondiente a cada vértice lo representaremos con la letra griega que toque, empezando el alfabeto griego (α, β, γ).



En otras palabras:

- En el vértice A está el ángulo α y opuesto a él, el lado a.
- En el vértice B está el ángulo β y opuesto a él, el lado b.
- En el vértice C está el ángulo y opuesto a él, el lado c.

En la medida de lo posible usaremos siempre esa convención, para todos los triángulos, sean rectángulos o no. También marcaremos los ángulos rectos como en la figura, con forma cuadrada.

3.2. DEFINICIONES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS ESENCIALES

Una vez determinada la notación, las razones trigonométricas se definen como:

- **Seno:** razón que existe entre el cateto opuesto del ángulo de estudio y la hipotenusa.

$$\sin \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hiputenusa}} = \frac{a}{b}$$

- **Coseno:** división del cateto adyacente del ángulo analizado entre la hipotenusa del triángulo.

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hiputenusa}} = \frac{c}{b}$$

- **Tangente:** razón que existe entre el lado opuesto y el cateto adyacente del triángulo. Se expresa como la división del seno entre el coseno.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{a}{c} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Cada razón trigonométrica tiene su **razón recíproca**, es decir:

- **Secante:** razón recíproca del coseno que consiste en la relación entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto adyacente.

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

- **Cosecante:** razón recíproca del seno que consiste en la relación entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto opuesto.

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

- **Cotangente:** razón recíproca de la tangente que consiste en la relación entre la longitud del cateto adyacente y la del opuesto.

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Estas razones no son independientes unas de otras. De hecho, si sabemos que un ángulo es agudo, basta una CUALQUIERA de las razones trigonométricas para calcular todas las demás.

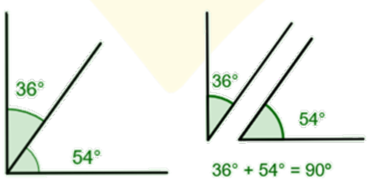
3.3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS MÁS COMUNES

A continuación, se especifican los valores de las razones trigonométricas de los ángulos 0°, 30°, 45°, 60° y 90°. Estas razones conviene sabérselas de memoria de cara a operar con las funciones trigonométricas.

	0°	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

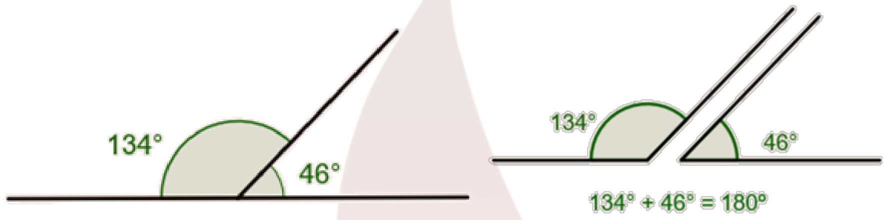
4. ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Dos ángulos son complementarios si la suma de ambos resulta 90°. Por ejemplo 30° y 60° son ángulos complementarios, 20° y 70° o 45° y 45° también. De forma genérica si llamamos α a cualquier ángulo agudo su complementario es 90 - α.



5. ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

Por otro lado, los ángulos suplementarios son aquellos cuya suma resulta 180°.



6. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo consiste en calcular todos sus lados y sus ángulos.

En un triángulo hay seis datos: tres lados y tres ángulos. Si se conocen tres de estos seis datos el triángulo podrá resolverse. Sin embargo, en el tema que tratamos solo abordaremos la resolución de los triángulos rectángulos, por lo que uno de esos datos viene siempre dado, que es el angulo de 90°.

Por lo tanto, con lo dicho anteriormente, **resolver un triángulo rectángulo** significa hallar el valor de los tres lados y el valor de los dos ángulos agudos.

6.1. FÓRMULAS PARA LA RESOLUCIÓN DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Para resolver triángulos rectángulos debemos conocer:

- **El Teorema de Pitágoras:** El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
- Las **definiciones de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente**.
- La **suma de los ángulos de un triángulo siempre da 180°.**

6.2. CASOS DE PROBLEMAS DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

6.2.1. SI SE CONOCEN DOS LADOS

1. Aplicaremos el Teorema de Pitágoras para calcular el otro lado.
2. Después usaremos las definiciones de las razones trigonométricas para calcular los ángulos.

6.2.2. SI SE CONOCE UN LADO Y UN ÁNGULO

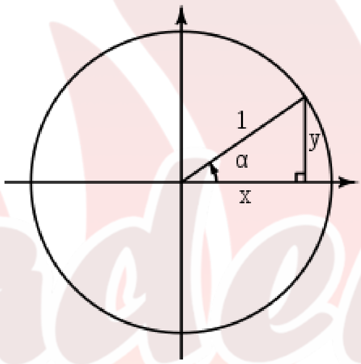
Usaremos las definiciones de las razones trigonométricas para resolver el triángulo.

Anexo I

Circunferencia trigonométrica

La **circunferencia goniométrica, trigonométrica, unitaria,** es una circunferencia de radio uno, normalmente con su centro en el origen (0, 0) de un sistema de coordenadas. Dicha circunferencia se utiliza con el fin de poder estudiar fácilmente las razones trigonométricas y funciones trigonométricas, mediante la representación de triángulos rectángulos auxiliares.

Si (x, y) es un punto de la circunferencia unidad del primer cuadrante, entonces x e y son las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene longitud 1.



Aplicando el teorema de Pitágoras, se satisface la ecuación:

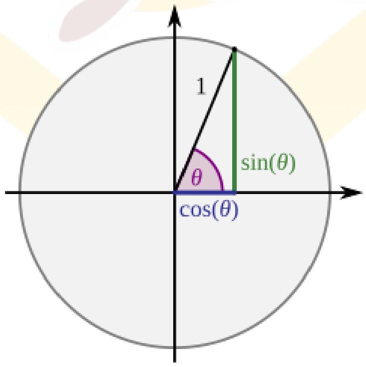
$$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = 1 = \text{radio} = \text{hipotenusa}$$

Funciones trigonométricas en la circunferencia unitaria

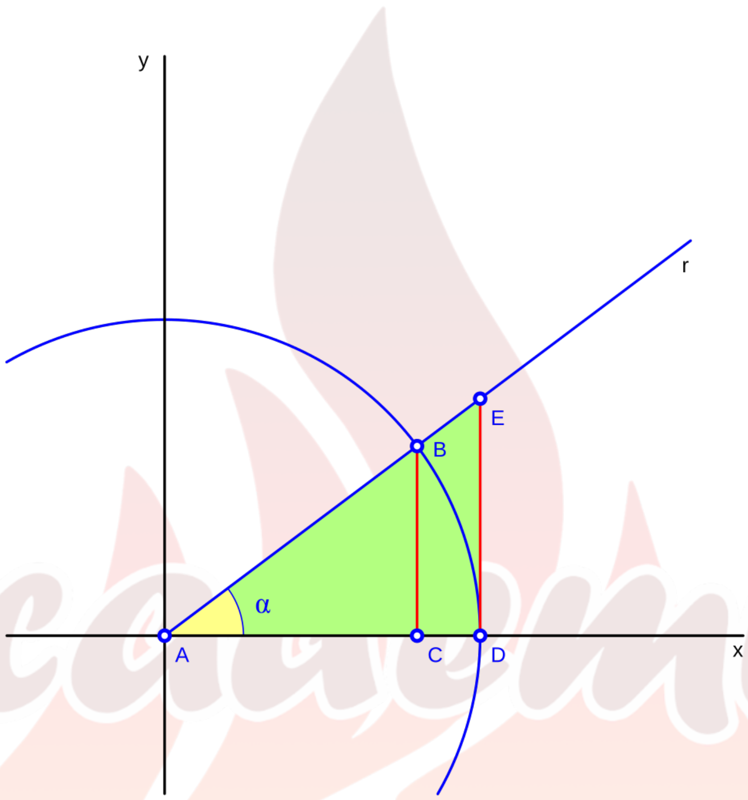
Si (x, y) es un punto de la circunferencia unidad, y el radio que tiene el origen en (0, 0), forma un ángulo $\boldsymbol{\theta}$ con el eje x, las principales funciones trigonométricas se pueden representar como razón de segmentos asociados a triángulos rectángulos auxiliares, de la siguiente manera:

- El seno es la razón entre el cateto opuesto (a) y la hipotenusa (c) $\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{\textbf{cateto opuesto}}{\textbf{hipotenusa}} = \frac{\mathbf{y}}{\textbf{hipotenusa}}$ y dado que la hipotenusa es igual al radio, que es 1, se deduce que $\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\theta} = \mathbf{y}.$
- El coseno es la razón entre el cateto contiguo (b) y la hipotenusa (c) $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{\textbf{cateto contiguo}}{\textbf{hipotenusa}} = \frac{\mathbf{x}}{\textbf{hipotenusa}}$ y dado que la hipotenusa es igual al radio, que es 1, se deduce: $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta} = \mathbf{x}$.

Esto se representa en la siguiente figura:



En lo que respecta a la tangente, si cogemos los siguientes segementos y los relacionamos con la tangentes se tienen las siguientes relaciones por semejanzas:



$$\mathrm{tg}\ \boldsymbol{\theta} = \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{DE}}{1} = \mathrm{DE}$$

Debido a esto el segmento DE representa el valor de la tgθ.