MATEMÁTICAS

TEMA 5

INECUACIONES. INECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO. SISTEMAS DE INECUACIONES CON UNA Y DOS INCÓGNITAS.

"Las personas que tienen un decidido talento matemático constituyen, por así decirlo, una clase favorecida. Tienen la misma relación con el resto de la humanidad que quienes tienen una formación académica con quienes no la tienen."

August Ferdinand Möbius (1790 - 1868)

1. INECUACIONES

1.1. ¿QUÉ ES UNA INECUACIÓN?

En una inecuación se usa el símbolo de desigualdad para establecer las relaciones entre los distintos términos. Se podría asimilar a una ecuación en la que el símbolo de la igualdad se sustituye por uno de los cuatro símbolos de desigualdad.

Una **inecuación** es una desigualdad algebraica en la que aparecen una o más incógnitas.

El **grado** de una inecuación es el mayor de los grados al que están elevadas sus incógnitas.

Sabiendo esto:

$4 \geq x + 2$ y $x + y \geq 2$ son inecuaciones de primer grado, mientras que $x^2 - 5 \geq x$ es de segundo grado.

1.2. ¿QUÉ ES UNA DESIGUALDAD?

Una **desigualdad** es una relación de orden entre distintas expresiones algebraicas conectadas a través de un símbolo.

Existen cuatro símbolos de desigualdad, estos son:

- menor que: $<$
- mayor que: $>$
- menor o igual que: $\leq$
- mayor o igual que: $\geq$

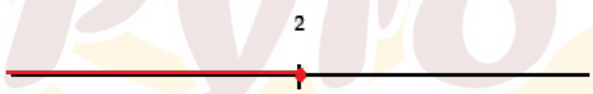
1.3. RESOLUCIÓN DE INECUACIONES

Resolver una inecuación consiste en encontrar los valores que la verifican. Éstos se denominan soluciones de la misma.

Por ejemplo, la inecuación:

$$4 \geq x + 2 \rightarrow x \in (-\infty, 2]$$

Representando este resultado en la recta real nos quedaría:



1.4. INECUACIONES EQUIVALENTES

Dos inecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución.

A veces, para resolver una inecuación, resulta conveniente encontrar otra equivalente más sencilla.

Para ello, se pueden realizar las siguientes transformaciones:

- Sumar o restar la misma expresión a los dos miembros de la inecuación.

$$5x + 4 < 9 \rightarrow 5x + 4 - 4 < 9 - 4 \rightarrow 5x < 5$$

- Multiplicar o dividir ambos miembros por un número positivo.

$$5x < 5 \rightarrow \frac{5x}{5} < \frac{5}{5} \rightarrow x < 1$$

- Multiplicar o dividir ambos miembros por un número negativo y cambiar la orientación del signo de la desigualdad.

2. INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Una inecuación de primer grado con una incógnita puede escribirse de la forma:

$$ax > b, ax < b, ax \geq b \text{ o bien } ax \leq b$$

Para resolver la inecuación en la mayoría de los casos conviene seguir el siguiente procedimiento:

1. Quitar denominadores, si los hay. Para ello, se multiplica los dos miembros de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores.
2. Quitar los paréntesis, si los hay.
3. Transponer los términos con x a un miembro y los números al otro.
4. Reducir términos semejantes.
5. Despejar la x.

Por ejemplo:

$$\frac{x-5}{3} - \frac{(x-8)}{6} > \frac{3-x}{2} \rightarrow \frac{2(x-5)-(x-8)}{6} > \frac{3(3-x)}{6} \rightarrow 2(x-5)-(x-8) > 3(3-x) \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x - 10 - x + 8 > 9 - 3x \rightarrow 2x - x + 3x > 10 - 8 + 9 \rightarrow 4x > 11 \rightarrow x > \frac{11}{4}$$

$$\rightarrow \rightarrow \mathbf{x} \in \left(\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{4}}, \infty\right)$$

3. INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

Una inecuación de segundo grado con una incógnita puede escribirse de la forma:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

empleando cualquiera de los cuatro signos de desigualdad.

Para resolverla, calculamos las soluciones de la ecuación asociada, las representamos sobre la recta real, quedando por tanto la recta dividida en tres, dos o un intervalo, dependiendo de que la ecuación tenga dos, una o ninguna solución.

En cada uno de ellos, el signo del polinomio se mantiene constante, por lo que bastará con determinar el signo que tiene dicho polinomio para un valor cualquiera de cada uno de los intervalos. Para saber si las soluciones de la ecuación verifican la inecuación, bastará con sustituirla en la misma y comprobarlo.

Por ejemplo:

$x^2 - 6x + 5 \geq 0$

Las raíces de $x^2 - 6x + 5 \geq 0$ son x = 1 y x = 5.

	$(-\infty, 1)$	$(1,5)$	$(5, \infty)$
Signo de $x^2 - 6x + 5$	+	-	+
$x^2 - 6x + 5 > 0$	Sí	No	Sí

Por tanto, la solución es $x \in (-\infty, 1] \cup [5, \infty)$.

4. SISTEMAS DE INECUACIONES CON UNA Y DOS INCÓGNITAS

Un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas es el conjunto de dos o más inecuaciones, que debe satisfacerse a la vez.

Para su resolución, se procede de la manera siguiente:

- Se resuelve cada inecuación por separado.
- El conjunto solución del sistema, también llamado región factible, está formada por las soluciones comunes a todas las inecuaciones.

Tomemos como ejemplo el sistema de inecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$$

<u>1º Representamos la región solución de la primera inecuación.</u>

Transformamos la desigualdad en igualdad.

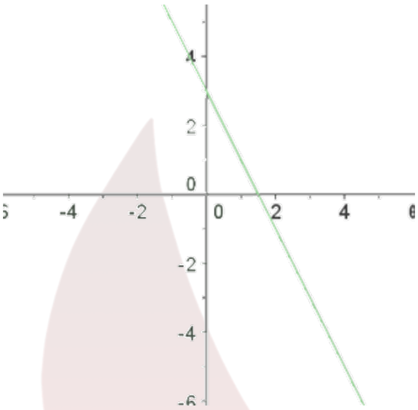
$$2x + y = 3$$

Damos a una de las dos variables dos valores, con lo que obtenemos dos puntos:

$$x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0 + y = 3 \rightarrow y = 3 \rightarrow P_1(0, 3)$$

$$x = 1 \rightarrow 2 \cdot 1 + y = 3 \rightarrow y = 1 \rightarrow P_2(1, 1)$$

Al representar y unir estos puntos obtenemos una recta.

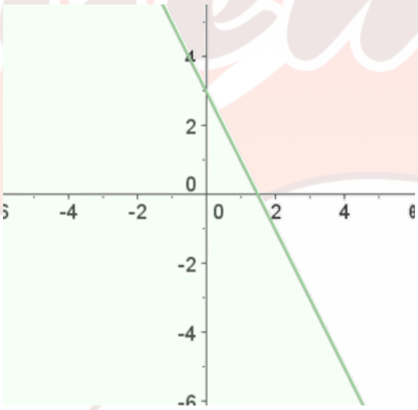


Tomamos un punto, por ejemplo el (0, 0), los sustituimos en la desigualdad. Si se cumple, la solución es el semiplano donde se encuentra el punto, si no la solución será el otro semiplano.

$$2x + y \leq 3$$

$$2 \cdot 0 + 0 \leq 3 \rightarrow 0 \leq 3 \rightarrow \text{Se cumple}$$

El semiplano que está sombreado es la solución de la primera inecuación.



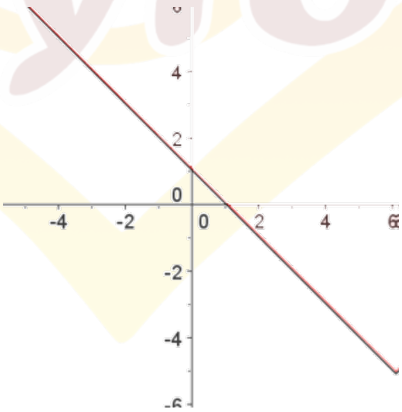
Hacemos lo mismo con la segunda inecuación:

2º Representamos la región solución de la segunda inecuación.

$$x + y = 1$$

$$x = 0 \rightarrow 0 + y = 1 \rightarrow y = 1 \rightarrow P_3(0, 1)$$

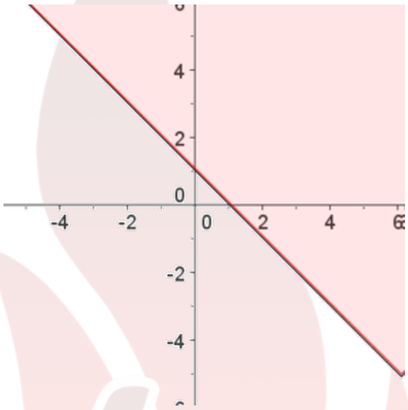
$$x = 1 \rightarrow 1 + y = 1 \rightarrow y = 0 \rightarrow P_4(1,0)$$



Tomamos un punto, el (0, 0) por ejemplo y lo sustituimos en la inecuación, como no se cumple la desigualdad será el semiplano en el que no está el punto.

$$x + y \geq 1$$

$$0 + 0 \geq 1 \rightarrow \text{No se cumple}$$



3º La solución es la intersección de las regiones soluciones.