MATEMÁTICAS

TEMA 4

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO. ECUACIONES BICUADRADAS. ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR A 2. SISTEMAS DE ECUACIONES CON TRES INCÓGNITAS. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES.

"Es imposible encontrar la forma de convertir un cubo en la suma de dos cubos, una potencia cuarta en la suma de dos potencias cuartas, o en general cualquier potencia más alta que el cuadrado en la suma de dos potencias de la misma clase; para este hecho he encontrado una demostración excelente. El margen es demasiado pequeño para que la demostración quepa en él."

Pierre de Fermat Beaumont-de-Lomagne (1601- 1665)

1. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

1.1. ¿QUÉ ES UNA ECUACIÓN?

Antes de pasar a las ecuaciones de segundo grado conviene recordar el concepto de ecuación, al que ya se hizo referencia en el tema 2. Una **ecuación** es una igualdad matemática entre dos expresiones, denominadas miembros y separadas por el signo igual, en las que aparecen elementos conocidos y datos desconocidos o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas.

Recordar también que el **grado** de una ecuación corresponde a la máxima potencia a la que está elevada la incógnita algebraica de la ecuación.

1.2. ¿PARA QUÉ SE USAN LAS ECUACIONES?

Las ecuaciones sirven para codificar relaciones en lenguaje algebraico y, a partir de ahí, manejarlas matemáticamente. Esto supone una herramienta muy potente para resolver problemas.

1.3. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una ecuación de segundo grado es aquella que tiene como forma general la siguiente:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{con } a \neq 0$$

Una ecuación tiene tantas soluciones como su grado. En el caso de las ecuaciones de segundo grado tendrá 2 soluciones o 1 o ninguna en el campo real.

Según sea la ecuación de segundo grado sus soluciones se pueden hallar:

1.3.1. CASOS

Caso 1: el coeficiente de la x es 0 (b = 0)

En este caso la ecuación es de la forma:

$$ax^2 + c = 0$$

Para hallar las soluciones basta con despejar la x:

$$ax^2 = -c \rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \rightarrow x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \rightarrow x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Caso 2: el término independiente es 0 (c = 0)

En este caso la ecuación es de la forma:

$$ax^2 + bx = 0$$

Para resolver basta con sacar factor común a la x:

$$ax^2 + bx = 0 \rightarrow x(ax + b) = 0 \rightarrow x_1 = 0;\ ax + b = 0 \rightarrow x_2 = -\frac{b}{a}$$

En este caso siempre una de las dos soluciones va a ser la x = 0.

Los casos 1 y 2 son **ecuaciones de segundo grado** incompletas, que también se pueden resolver aplicando la fórmula general. Sin embargo, es más rápido resolverlas de la manera que acabamos de exponer.

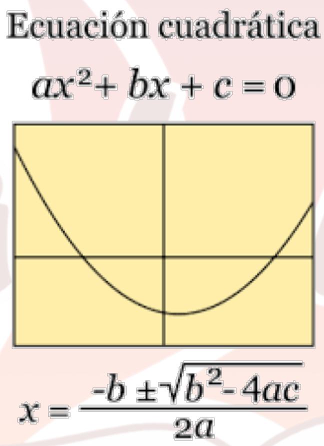
Caso 3: resolución analítica de una ecuación de segundo grado completa

Solución gráfica de una ecuación de segundo grado

Consideramos la función:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Su representación gráfica es una parábola, donde las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son los puntos de corte de ésta con el eje de abscisas.



Solución analítica de una ecuación de segundo grado completa

Partiendo de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ vamos a obtener el valor de x. Pasamos el término independiente al segundo miembro quedando expresado de la siguiente manera:

$$ax^2 + bx = -c$$

Multiplicamos toda la ecuación por 4a:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Sumamos b^2 a ambos miembros:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

El primer miembro es el cuadrado del binomio 2ax + b. Por tanto:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Extraemos la raíz cuadrada:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Pasamos b al segundo miembro y dividimos por 2a, con lo que obtenemos el siguiente resultado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por tanto:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Es la fórmula general para calcular las dos soluciones de la ecuación de segundo grado.

Particularidades:

El radicando, $b^2 - 4ac$, recibe el nombre de discriminante de la ecuación. Se representa por la letra griega Δ. Según sea el signo del discriminante pueden darse tres casos:

- $\Delta > 0$: La ecuación tendrá dos soluciones x_1 y x_2.
- $\Delta = 0$: La ecuación tiene una única **solución doble**, las dos soluciones de la ecuación son iguales:
$$x = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{-b}{2a}$$
- $\Delta < 0$: El radicando es negativo, la ecuación no tiene raíces reales (la raíz da lugar a un número complejo no real).

1.3.2. SUMA Y PRODUCTO DE LAS SOLUCIONES EN UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Vamos a calcular ahora a qué es igual la suma y el producto de las dos raíces de una ecuación de segundo grado. Llamamos: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ a las dos soluciones o raíces.

Veamos en primer lugar, a qué es igual la suma de ambas:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} + (-b) - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{b}{a}$$

Es decir:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Veamos ahora el producto:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} == \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Es decir:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Fórmula de Cardano: $x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Las igualdades anteriores nos permiten resolver el problema inverso al habitual: en lugar de dada una ecuación hallar sus raíces o soluciones, podremos, sabiendo cuáles son las soluciones de una ecuación, hallar la expresión de dicha ecuación.

En efecto, consideramos la ecuación de segundo grado de siempre, de soluciones x_1 y x_2:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dividiendo toda la ecuación por el coeficiente de x^2:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Ecuación equivalente a la dada.

Fijándonos en dicha ecuación, vemos que el coeficiente de la x es igual a la suma de las dos raíces con el signo contrario, mientras que el término independiente es igual al producto de las dos raíces.

Como consecuencia: si las dos raíces de una ecuación de segundo grado son x_1 y x_2, la ecuación es:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0 \rightarrow x^2 - sx + p = 0$$

2. ECUACIONES BICUADRADAS

Se llaman ecuaciones bicuadradas a las ecuaciones del tipo siguiente:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Son ecuaciones de cuarto grado, en las cuales la incógnita aparece únicamente elevada a potencias pares. Al ser de cuarto grado, tendrá 4 soluciones.

El proceso general para resolver este tipo de ecuaciones es hacer un cambio de variable.

Haciendo $t = x^2$ tendremos la expresión siguiente:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \rightarrow a(x^2)^2 + bx^2 + c \rightarrow at^2 + bt + c = 0$$

Conseguimos convertir la ecuación de cuarto grado en una ecuación de segundo grado fácil de resolver, de ahí que lo haya incluido como una ecuación de segundo grado particular. Se resuelve la ecuación de segundo grado como tal y una vez resuelta debemos realizar el último paso:

Hemos hallado el valor de t, pero la incógnita es x. Con lo cual hemos de deshacer el cambio efectuado:

$$\text{Si } x^2 = t \rightarrow x = \pm\sqrt{t}$$

3. ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR A 2

Una ecuación de grado superior a dos es una ecuación escrita de la forma siguiente:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 = 0 \text{ donde } n > 2$$

Este tipo de ecuación se puede descomponer en factores de primer y segundo grado, entonces basta igualar a cero cada uno de los factores y resolver las ecuaciones de primer grado y de segundo grado resultantes.

Para mejor entender los pasos de resolución, vamos a tomar el siguiente ejemplo:

$$2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 0$$

Utilizamos la regla de **Ruffini** y la **formula general** para ecuaciones de segundo grado con el objetivo de reducir el orden de la ecuación.

Factorizamos la ecuación de cuarto grado

Para factorizar la ecuación:

$$E(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$$

1. Buscamos los divisores del término independiente.

   El término independiente es el 6, ya que el termino independiente de un polinomio es aquel que no está multiplicado por x. Los divisores de 6 son: 1, -1, 2, -2, 3, -3.

   Esto lo hacemos con el fin de encontrar un valor que resuelva la ecuación $E(x) = 0$, y de este modo encontrar una raíz de la ecuación para que nos sea más fácil factorizarlo. Una vez encontrados los divisores del término independiente, la siguiente etapa es:

2. Evaluamos el polinomio en los divisores del término independiente.

   Si x = 1.

   $$E(1) = 2(1)^4 + (1)^3 - 8(1)^2 - (1) + 6 = 2 + 1 - 8 - 1 + 6 = 0$$

   x = 1, es entonces una raíz de $E(x)$.

   Como hemos encontrado una raíz, sabemos que el termino x-1 divide a $E(x)$.

3. Usamos la regla de **Ruffini**.

   La regla de Ruffini nos facilita el cálculo de la división de $E(x)$ entre x -1.

   Tomando los términos de $E(x)$, la raíz encontrada (x = 1) y colocándolos como indica la regla de Ruffini tenemos.

	2	1	-8	-1	6
1		2	3	-5	-6
	2	3	-5	-6	0

   Esto implica que la división $E_1(x)$ entre la raíz x = 1 da como resultado la ecuación $E_1(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$.

   Por lo que tenemos que $E(x) = (x - 1)(2x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$

Factorizamos la ecuación de tercer grado

Para factorizar la ecuación $E_1(x)$ obtenida en el paso anterior, realizaremos un procedimiento similar.

1. Se comprueba como se ha hecho anteriormente que con x = 1, y se obtiene que $E_1(1) \neq 0$, por lo que se entiende que x = 1 no es raíz de $E_1(x)$.
2. Seguimos probando con x = -1:

$$E_1(-1) = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 5(-1) - 6 = -2 + 3 + 5 - 6 = 0$$

Por lo que x= -1 es una raíz de $E_1(x)$, es decir que x = -1 divide a $E_1(x)$.

3. Usamos la regla de **Ruffini** para realizar la división de $E_1(x)$ entre x+1.

	2	3	-5	-6
-1		-2	-1	´6
	2	1	-6	0

Lo que implica que el resultado de la división es la expresión $E_2(x) = 2x^2 + x - 6$, es decir, que $E_1(x) = (x+1)(2x^2 + x - 6)$.

Factorizamos la ecuación de segundo grado

Seguidamente encontramos las raíces del polinomio de $E_2(x) = 2x^2 + x - 6$ usando la fórmula general.

$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(2)(-6)}}{2(2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4}$$

Entonces las raíces de $E_2(x)$ son: $x_1 = -2$ y $x_2 = 3/2$.

Lo que implica que: $E_2(x) = (x+2)\left(x - \frac{3}{2}\right)$

Por lo que llegamos a la conclusión de que:

$$E(x) = (x-1)(x+1)(x+2)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

4. SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Los sistemas de ecuaciones lineales son ecuaciones en las que todas sus incógnitas están elevadas a la unidad, no pudiendo aparecer el producto de dos de ellas.

Es un conjunto de ecuaciones que debe verificarse para los mismos valores de las incógnitas, llamadas **soluciones**.

Resolver un sistema es encontrar los valores que, sustituidos en las incógnitas, cumplan todas las ecuaciones a la vez

Se clasifican atendiendo a criterios diversos: número de ecuaciones o de incógnitas, tipo de las soluciones…

Los sistemas de ecuaciones lineales atendiendo, al tipo de solución, se clasifican en, los que tienen solución se llaman *compatibles* y los que no, *incompatible*. Los **compatibles** pueden ser

- **Compatible determinado:** si posee una solución
- **Compatible indeterminado**: si posee más de una solución (poseen infinitas)

Vamos a repasar los tres métodos elementales de resolución de sistemas lineales con dos ecuaciones y dos incógnitas que son:

4.1. MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

El proceso consiste en despejar una cualquiera de las incógnitas de una cualquiera de las ecuaciones y sustituir en la otra.

Por ejemplo, en el sistema: $\begin{cases} 5x - y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$

Despejamos, por ejemplo, la y de la primera ecuación:

$$y = 5x - 3$$

Y sustituimos en la segunda:

$$2x + 3(5x - 3) = 8 \rightarrow x = 1$$

Y, por tanto, y = 2.

4.2. MÉTODO DE IGUALACIÓN

Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones, igualando posteriormente ambas expresiones. Despejamos, por ejemplo, la y en ambas ecuaciones:

$$5x - y = 3$$

$$2x + 3y = 8 \rightarrow y = 5x - 3$$

$$y = \frac{8 - 2x}{3}$$

Igualando:

$$5x - 3 = \frac{8 - 2x}{3} \rightarrow x = 1$$

Posteriormente, para hallar y se sustituye el valor encontrado de x en una cualquiera de las dos ecuaciones iniciales, y se calcula el correspondiente valor de y.

4.3. MÉTODO DE REDUCCIÓN

Este método consiste en transformar alguna de las ecuaciones en otras equivalentes de manera que al sumarlas o restarlas se eliminen una de las incógnitas. Multiplicando la primera ecuación por 3, obtenemos el sistema equivalente al siguiente:

$$5x - y = 3 \rightarrow 15x - 3y = 9 \rightarrow 17x = 17 \rightarrow x = 1$$

$$2x + 3y = 8 \rightarrow 2(1) + 3y = 8 \rightarrow y = 2$$

4.4. RESOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE GAUSS

El **método de Gauss** está basado en el método de reducción también llamado de cascada o triangulación. La ventaja que tiene este método es que es fácilmente generalizable a sistemas con cualquier número de ecuaciones y de incógnitas. Este método consiste en obtener, para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, un sistema equivalente cuya primera ecuación tenga tres incógnitas; la segunda, dos; y la tercera una.

Un **sistema equivalente** a otro cuando ambos tienen las mismas soluciones. Son sistemas cuyas ecuaciones son complicadas, en su lugar resolvemos otro sistema que tenga las mismas soluciones que el propuesto (sistema equivalente) y que sea de ecuaciones mucho más sencilla

Se obtiene así un sistema triangular de la forma siguiente:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ 0 + B'y + C'z = D' \\ 0 + 0 + C''z = D'' \end{cases}$$

La resolución del sistema es inmediata; en la tercera ecuación calculamos sin dificultad el valor de z, llevamos este valor de z a la segunda ecuación y obtenemos el valor de y, y con ambos valores calculamos el valor de x en la primera ecuación.

Veámoslo con un ejemplo:

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = -1 \\ 2x - 3y - 2z = 1 \\ -x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$$

El **proceso** es el siguiente:

1. Se elimina la incógnita x en las ecuaciones segunda y tercera, sumando a éstas, la primera ecuación multiplicada por 2 y 1, respectivamente, quedando el sistema:

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = -1 \\ 2x - 3y - 2z = 1 \\ -x + 2y + 4z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} E2 - 2E1 \\ E3 + E1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + 4y + 3z = -1 \\ 0 - 11y - 8z = 3 \\ 0 + 6y + 7z = 1 \end{cases}$$

2. Suprimimos la incógnita y de la tercera ecuación sumando a la misma, previamente multiplicada por 11, la segunda multiplicada por 6:

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = -1 \\ 0 - 11y - 8z = 3 \\ 0 + 6y + 7z = 1 \end{cases} \rightarrow (11E3 + 6E2) \rightarrow \begin{cases} x + 4y + 3z = -1 \\ 0 - 11y - 8z = 3 \\ 0 + 0 + 29z = 29 \end{cases}$$

3. Se resuelve el sistema escalonado empezando por la tercera ecuación:

$$29z = 29 \rightarrow z = \frac{29}{29} \rightarrow z = 1$$

Ahora, en la segunda ecuación:

$$-11y - 8(1) = 3 \to -11y = -11 \to y = -1$$

Y, por último, en la primera:

$x + 4(-1) + 3(1) = -1 \to x = -1 + 1 = 0$

La solución del sistema es:

$$x = 0; y = -1; z = 1$$

4.5. DISCUSIÓN DE SISTEMAS APLICANDO EL MÉTODO DE GAUSS

Discutir un sistema consiste en explicar razonadamente sus posibilidades de solución dependiendo del valor de sus coeficientes y términos independientes. En los sistemas escalonados la discusión se hace a partir de la ecuación más simple, que supondremos que es la última. Partimos del sistema inicial:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 & (E1) \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 & (E2) \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 & (E3) \end{cases}$$

Que transformamos en otro equivalente a él, de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 & (E1) \\ 0 + a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 & (E'2) \\ 0 + 0 + a''_{33}z = b''_3 & (E''3) \end{cases}$$

Para ello se elimina la incógnita x de la ecuación segunda (E2) y (E3) y las incógnitas x e y de la tercera ecuación (E3). Así, estudiando la tercera ecuación del sistema propuesto, $a_{33}''z = b''_3$, se determinan las posibilidades de solución del sistema inicial, verificándose:

- Si $a''_{33}z \neq 0$, el sistema es **compatible determinado**, pues siempre se puede encontrar una solución única empezando a resolver el sistema por la tercera ecuación.

- Si $a''_{33}z = 0$ y $b''_3 = 0$ el sistema es **compatible indeterminado**, pues la ecuación E3 desaparece (queda 0z = 0, que se cumple para cualquier valor de z resultando así un sistema con dos ecuaciones y tres incógnitas), el sistema anterior queda:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ \quad a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 \\ \qquad 0z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ \quad a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 \end{cases} \to \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 - a_{13}z \\ \quad a'_{22}y = b'_2 - a'_{23}z \end{cases}$$

Para resolver este sistema hemos de suponer la incógnita z conocida y hallar las otras en función de ella. (En la práctica, suele hacerse z = k.)

- Si $a''_{33} = 0$ y $b''_3 \neq 0$ el sistema es **incompatible**, pues la ecuación E3 queda $0z = b''_3 \neq 0$, que evidentemente es absurda, pues cualquier valor de z multiplicado por 0 debe dar 0.

5. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Un sistema de ecuaciones es no lineal cuándo **al menos una de sus ecuaciones no es de primer grado.**

La resolución de estos sistemas se suele hacer por el **método de sustitución**, para ello seguiremos los siguientes pasos con el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

1. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones, preferentemente en la de primer grado.

$$y = 7 - x$$

2. Se sustituye el valor de la incógnita despejada en la otra ecuación.

$$x^2 + (7 - x)^2 = 25$$

3. Se resuelve la ecuación resultante:

$$x^2 + 49 - 14x + x^2 = 25$$

$$2x^2 - 14x + 24 = 0$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

4. Cada uno de los **valores obtenidos se sustituyen** en la **otra ecuación**. Se obtienen así los valores correspondientes de la otra incógnita.

$$\begin{gathered} x_1 = 4 \rightarrow y_1 = 4 \\ x_2 = 3 \rightarrow y_2 = 3 \end{gathered}$$