MATEMÁTICAS

TEMA 2

EXPRESIONES ALGEBRAICAS. MONOMIOS. OPERACIONES CON MONOMIOS.

TEMA 3

POLINOMIOS. SUMA, PRODUCTO Y COCIENTE DE UN POLINOMIO. TEOREMA DEL RESTO. REGLA DE RUFFINI. IDENTIDADES NOTABLES. FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO. TRIÁNGULO DE TARTAGLIA.

"La matemática es la reina de las ciencias y la aritmética es la reina de las matemáticas. Ella a menudo se digna a prestar un servicio a la astronomía y a otras ciencias naturales, pero en todas las relaciones, tiene derecho a la primera fila."

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Antes de definir el concepto de expresión algebraica conviene definir el concepto de **álgebra**. Se entiende como tal a la parte de las matemáticas que estudia estructuras abstractas en las que, mediante números, letras y signos, se generalizan las operaciones aritméticas habituales, como la suma y el producto.

Por su parte, las **expresiones algebraicas** son combinaciones de números, variables y operaciones matemáticas, como la suma, resta, multiplicación y división. Se representan mediante símbolos y letras, donde los números se consideran constantes y las letras representan variables, es decir, valores que pueden variar. Funcionan todas las reglas aritméticas que hemos aprendido hasta ahora, solo que algunos números son sustituidos por letras que pueden recibir distintos valores. Se va a entender mejor con ejemplos:

- **Suma de dos números**: Si tenemos dos números, por ejemplo, el 3 y el 5, sabemos que para sumarlos se escribe 3+5. Sabemos que su suma vale 8. Si los dos valores no son conocidos, también podremos sumarlos, aunque ahora no sabremos el resultado. Podemos representar esos dos números con las letras x e y, que como no tienen un valor fijo se llamarán **variables**. Si queremos expresar la suma de estos dos números, podemos usar la expresión algebraica: $x + y$.
- **El doble de un número:** $2x$
- **Área de un rectángulo:** Al igual que para calcular el área de un rectángulo de base 4 y altura 2 multiplicamos 4 por 2, si deseamos calcular el área de un rectángulo con base «b» y altura «a», podemos utilizar la expresión algebraica: $A = b \cdot a$, donde «A» representa el área del rectángulo.
- **Fórmula del área de un círculo:** Si conocemos el radio de un círculo, representado por «r», podemos utilizar la expresión algebraica: $A = \pi \cdot r2$ para calcular su área. Aquí, «A» denota el área del círculo y π es una constante que representa el valor aproximado de pi, usualmente tomamos 3,1416.
- **Conversión de temperatura**: Supongamos que deseamos convertir una temperatura en grados Celsius a grados Fahrenheit. Podemos utilizar la expresión algebraica: $F = (9/5) \cdot C + 32$, donde «C» representa la temperatura en grados Celsius y «F» representa la temperatura equivalente en grados Fahrenheit.

1.1. ¿PARA QUÉ SIRVEN LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS?

Como ya habrás podido intuir por los ejemplos, las expresiones algebraicas se utilizan para describir **situaciones y relaciones matemáticas en términos generales**. Esto es, en situaciones en las que no todos los valores son conocidos. Nos permiten expresar fórmulas, ecuaciones y modelos matemáticos de manera abstracta, lo que facilita el análisis y la resolución de problemas.

Un ejemplo de la utilidad de las expresiones algebraicas sería, por ejemplo, obtener nuevas fórmulas. Como sabemos que el volumen de los prismas y los cilindros es el área de la base (A_b) por la altura (h), $V = A_b \cdot h$, podremos sustituir en esa fórmula el área de la base. Si sabemos que la base es un círculo, $A_b = \pi \cdot r^2$ podremos sustituir y escribir en una sola fórmula que el volumen del cilindro es $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

1.2. COMPONENTES DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

- **Constantes:** Son números fijos que no cambian su valor, como 2, 5 o π.
- **Variables:** Son letras que representan cantidades desconocidas o variables, como x, y, z. Estas variables nos permiten generalizar y resolver problemas para diferentes valores.
- **Operaciones matemáticas**: Incluyen suma, resta, multiplicación, división y exponentes, entre otras. Estas operaciones se aplican a las constantes y variables para formar expresiones más complejas.

Lo que **no se incluye en las expresiones algebraicas es la igualdad**, los ejemplos que hemos visto antes que contenían el signo igual lo que tenían a la izquierda se interpreta como el resultado de esa expresión, cuando tengamos a la izquierda otra expresión, estaremos hablando de **ecuaciones**.

1.3. SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Las expresiones algebraicas pueden simplificarse mediante el uso de propiedades y reglas algebraicas, como la distributiva, asociativa y conmutativa. La simplificación ayuda a reducir la expresión a una forma más manejable y comprensible. En el fondo, lo que se hace con el álgebra es extender cualquier regla aritmética, si vale para números, vale para expresiones algebraicas, x + x valdrá 2x.

1.4. APLICACIONES EN EL MUNDO REAL

Las expresiones algebraicas tienen numerosas aplicaciones en el mundo real. Algunos ejemplos incluyen:

- **Física:** En la descripción de leyes y fenómenos físicos, como la ley de gravitación universal o las ecuaciones del movimiento.
- **Economía:** En la modelización de problemas financieros, como el cálculo de intereses, beneficios o depreciación.
- **Ingeniería:** En el diseño y análisis de estructuras, circuitos eléctricos o sistemas de control.
- **Ciencias de la computación:** En algoritmos y programación, donde las expresiones algebraicas se utilizan para realizar cálculos y tomar decisiones.

1.5. EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y MONOMIOS

Los **monomios** son un caso particular de expresiones algebraicas que solo utilizan la operación producto y en las que los exponentes de las variables que aparezcan tienen que ser números naturales (y por tanto positivos). De las expresiones algebraicas vista en esta entrada serían monomios, todas menos esta dos: (9/5) · C + 32, además de x + y por contener una suma-Tampoco lo sería 1/x porque escrito como potencia es x-1, que no es un número natural.

1.6. EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y ECUACIONES

Entre las aplicaciones no hemos citado una de las principales que es el de las **ecuaciones**. Las veremos con más detalle en el tema correspondiente. Las ecuaciones no son expresiones algebraicas, por poco, porque lo que son es dos (o más) expresiones algebraicas unidas por el signo igual. Se va a entender mejor, como todo, con un ejemplo:

Decíamos arriba que el doble de un número es 2x. ¿Cómo diríamos «un número es el doble de otro»? No puede ser $x = 2x$, porque eso sería un número es igual a su doble. Pero sí puede ser $y = 2x$, porque al usar dos variables (letras) distintas estamos denotando exactamente eso. Si, por ejemplo consideramos los pares de puntos (x,y) que cumplen esa ecuación, esa igualdad entre expresiones algebraicas, tendríamos el (1,2), el (10,20), el (π, 2π) y TODOS los pares en los que la segunda coordenada es el doble que la primera.

2. MONOMIOS

Como ya hemos mencionado en anteriormente, un **monomio** es una combinación de números y letras relacionados por multiplicaciones y los exponentes de las letras solo pueden ser números naturales. Por ejemplo:

$$-5ax^3$$

Es un monomio porque son combinaciones de números y letras relacionados solo por multiplicación y el exponente que aparece es un número natural. En contraposición:

$$-2m^5 + m^3$$

No es un monomio porque aparecen sumas y restas.

2.1. PARTES DE UN MONOMIO

A continuación, detallamos los términos de los monomios.

- **Coeficiente:** es el número que multiplica a las letras.
- **Parte literal:** son las letras que aparezcan en el monomio con los exponentes.
- **Grado:** es la suma de los exponentes que tenga el monomio.
- **Variable:** son cada una de las letras que aparecen en el monomio.

Veamos estas partes con un ejemplo:

$$-2ab^2$$

Coeficiente: -2, es el número que acompaña a la parte literal

Parte literal: ab^2

Grado: 1 + 2 = 3. El grado del monomio es 3

Variable: a, b. Son las dos letras que aparecen en el monomio

2.2. MONOMIOS SEMEJANTES

Dos monomios son **semejantes** cuando tienen exactamente la misma parte literal. Por ejemplo, un monomio semejante al que hemos visto antes, $-2ab^2$, sería cualquiera que tuviese la misma parte literal: ab^2

3. POLINOMIOS

3.1. DEFINICIÓN

Pasando a definir que es un polinomio, no es sino una expresión construida a partir de la suma de monomios.

El aspecto genérico de un **polinomio** en la variable x es

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde los coeficientes a_k son números reales.

Decimos que un polinomio es **mónico** cuando el coeficiente de su término de mayor grado es igual a 1.

3.2. TÉRMINOS

Los **términos** de un polinomio vienen determinados por el número de monomios que tenga ese polinomio. Veamoslo con ejemplos:

$4y^3 + 3y - 7$ está formado por 3 monomios $4y^3$, 3y, -7 por lo tanto tendrá 3 términos.

$-3y^2 + 8y + 5x$ está formado por 3 monomios, $3y^4$, $8x^2$ y 5x, por lo tiene 3 términos.

3.3. GRADO

El **grado de un polinomio** vendrá dado por el mayor grado de sus monomios. Veamos esto con algunos ejemplos:

$\frac{1}{7}x^2 - 32x^3 + 8$ es un polinomio de grado 3 en la variable x.

$-5y^4 + 6x^2 + 11$ es un polinomio de grado 4 en las indeterminadas x e y.

$3x^2y^3 - 2 + 5y^2$ es un polinomio de grado 5 en x e y.

$8x - 9y + 3z$ es un polinomio de grado 1 en x, y y z.

3.4. VALOR NUMÉRICO

Si fijamos, o escogemos, un valor concreto para la variable de un polinomio y resolvemos las operaciones del citado polinomio aparece un número real que se denomina **valor numérico del polinomio** para ese valor determinado de la variable.

Como ejemplo con el que ilustrar este concepto: si hemos llamado p a un polinomio, a la evaluación de p en, por ejemplo, el número -5 la denotamos por p(-5) , y leemos ”p de menos cinco” o “p en menos cinco”. Con este criterio, si p es un polinomio cuya indeterminada es la variable x, podemos referirnos a él como p o p(x) indistintamente.

De esta forma apreciamos que un polinomio puede ser entendido como una manera concreta de asignar a cada número real otro número real.

3.5. OPERACIONES CON POLINOMIOS

3.5.1. SUMA DE POLINOMIOS

Como un polinomio es una suma de monomios, la suma de dos polinomios es otro polinomio. A la hora de sumar dos polinomios procederemos a sumar los monomios de igual parte literal.

En el siguiente ejemplo sumaremos dos polinomios disponiéndolos, adecuadamente, uno sobre otro.

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & 2x^5 & +6x^4 & +3x^3 & -11x^2 & +5x & +6 \\ + & -9x^5 & & +4x^3 & +11x^2 & -9x & -7 \\ \hline & -7x^5 & +6x^4 & +7x^3 & & -4x & -1 \end{array}$$

3.5.2. PROPIEDADES DE LA SUMA DE POLINOMIOS

Propiedad conmutativa. Si p y q son dos polinomios, no importa el orden en el que los coloquemos a la hora de sumarlos:

$$\mathrm{p} + \mathrm{q} = \mathrm{q} + \mathrm{p}$$

Propiedad asociativa. Nos señala cómo se pueden sumar tres o más polinomios. Basta hacerlo agrupándolos de dos en dos:

$$(\mathrm{p} + \mathrm{q}) + \mathrm{r} = \mathrm{p} + (\mathrm{q} + \mathrm{r})$$

Elemento neutro. Hay un polinomio con una propiedad particular: el resultado de sumarlo con cualquier otro siempre es este último. Se trata del polinomio dado por el número 0, el **polinomio cero.**

Elemento opuesto. Cada polinomio tiene asociado otro, al que llamaremos su **polinomio opuesto**, tal que la suma de ambos es igual al polinomio cero. Alcanzamos el polinomio opuesto de uno dado, simplemente, cambiando el signo de cada monomio.

3.5.3. RESTA DE POLINOMIOS

Recordemos que el polinomio opuesto de otro se obtiene simplemente cambiando el signo de cada monomio. Esta acción se corresponde con multiplicar por el número -1 el polinomio original. De esta forma el polinomio opuesto de p es

$$-\mathrm{p} \equiv (-1) \cdot \mathrm{p}$$

En este momento aparece de manera natural la **operación diferencia**, o **resta**, de polinomios. La definimos con la ayuda del polinomio opuesto de uno dado:

$$\mathrm{p} - \mathrm{q} \equiv \mathrm{p} + (-\mathrm{q})\ \mathrm{p} \equiv \mathrm{p} + (-1) \cdot \mathrm{q}$$

La resta consiste en sumar a un polinomio el opuesto de otro.

3.5.4. PRODUCTO DE POLINOMIOS

Otra operación que podemos realizar con polinomios es la **multiplicación**. El resultado del producto de polinomios siempre será otro polinomio. Aunque en un polinomio tenemos una indeterminada, o variable, como ella toma valores en los números reales, a la hora de multiplicar polinomios utilizaremos las propiedades de la suma y el producto de los números reales, en particular la propiedad distributiva del producto respecto de la suma; así, todo queda en función del producto de monomios, cuestión que resolvemos con facilidad:

$$\mathrm{ax^n \cdot bx^m = abx^{n+m}}$$

Podemos materializar el producto de polinomios tal y como multiplicamos números enteros.

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
\times & & & x^2 & -3x & +1 \\
\hline
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
 & 6x^4 & & -3x^2 & -12x & \\
-2x^5 & & +x^3 & +4x^2 & & \\
\hline
-2x^5 & +6x^4 & -x^3 & +x^2 & -11x & +4
\end{array}$$

3.5.5. PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE POLINOMIOS

Propiedad conmutativa. Si p y q son dos polinomios, no importa el orden en el que los coloquemos a la hora de multiplicarlos:

Propiedad asociativa. Nos señala cómo se pueden multiplicar tres o más polinomios. Basta hacerlo agrupándolos de dos en dos:

Elemento neutro. Hay un polinomio con una propiedad particular: al multiplicarlo por cualquier otro siempre nos da éste último. Se trata del polinomio dado por el número 1, el polinomio unidad.

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma. Cuando en una multiplicación de polinomios uno de los factores viene dado como la suma de dos polinomios como, por ejemplo, $(8x^2 – x)\ ((-2x + 11) + (x^3 – 4x))$ tenemos dos opciones para conocer el resultado:

a) realizar la suma y, después, multiplicar

$(8x^2 – x)\ ((–2x + 11) + (x^3 – 4x)) = (8x^2 – x)\ (x^3 – 6x + 11) = 8x^5 – 48x^3 + 88x^2 – x^4 + 6x^2 – 11x =$
$= 8x^5 – x^4 – 48x^3 + 94x^2 – 11x$

b) distribuir, aplicar, la multiplicación a cada uno de los sumandos y, después, sumar:

$(8x^2 – x)\ ((–2x + 11) + (x^3 – 4x)) = (8x^2 – x)\ (–2x + 11) + (8x^2 – x) + (8x^2 – x) \cdot (x^3 – 4x) =$
$= (–16x^3 + 88x^2 + 2x^2 – 11x) + (8x^5 – 32x^3 – x^4 + 4x^2) = 8x^5 – x^4 – 48x^3 + 94x^2 – 11x$

Comprobamos que obtenemos el mismo resultado.

En general, la **propiedad distributiva** de la multiplicación respecto de la suma nos dice que:

$$\mathrm{p \cdot (q + r) \equiv (p \cdot q) + (p \cdot r)}$$

Conviene comentar que la anterior propiedad distributiva leída en sentido contrario, de derecha a izquierda, es lo que comúnmente se denomina **sacar factor común**.

$$6x^6-10x^4-22x^3+2x^2=(3x^4-5x^2-11x+1)\cdot 2x^2$$

3.5.6. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, la división de $P(x)$, polinomio dividendo, entre $Q(x)$, polinomio divisor, nos proporcionará otros dos polinomios, el polinomio cociente $C(x)$ y el polinomio resto $R(x)$. También aquí pesará una exigencia sobre el polinomio resto: su grado deberá ser menor que el grado del polinomio divisor. La relación entre los cuatro será, naturalmente,

$$P(x)=Q(x)\cdot C(x)+R(x)$$

También escribiremos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

Al igual que ocurre con el algoritmo de la división entera, el algoritmo de la división de polinomios consta de varias etapas, de carácter repetitivo, en cada una de las cuales aparecen unos polinomios cociente y resto "provisionales" de forma que el grado de esos polinomios resto va descendiendo hasta que nos topamos con uno cuyo grado es inferior al grado del polinomio divisor, lo que indica que hemos concluido. Veamos este procedimiento con un ejemplo concreto:

Vamos a dividir el polinomio $P(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre el polinomio $Q(x)=2x^2-x+3$. Como el polinomio divisor, $Q(x)$, es de grado 2, debemos encontrar dos polinomios, un polinomio cociente $C(x)$, y un polinomio resto $R(x)$ de grado 1 o 0, tales que

$$P(x)=Q(x)\cdot C(x)+R(x)$$

3.6. TEOREMA DEL RESTO

El **teorema del resto** es muy útil para hallar los valores numéricos de los polinomios sin necesidad de sustituir directamente en ellos la incógnita por el número de que se trate. Haciendo uso de dicho teorema, podemos hallar las raíces de los polinomios, proceso que habrá que realizar con mucha frecuencia en lo sucesivo. El enunciado del teorema del resto es el siguiente:

Teorema del resto: el valor numérico de un polinomio $P(x)$ al particularizarlo en $x=a$ coincide con el resto que aparece al dividir $P(x)$ entre $x-a$.

De esta forma, podremos saber de antemano si una división va a ser exacta sin necesidad de efectuarla.

3.7. REGLA DE RUFFINI

Repasemos una serie de conceptos relativos a los polinomios antes de entrar a desarrollar detalladamente esta regla:

- **Polinomio**: es la suma algebraica de dos o más monomios. Si está en términos de la variable independiente x se denota como una función P(x) y en su forma general es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- **Término independiente del polinomio**: se corresponde con el término a_0.
- **Raíz del polinomio:** valor que satisface la ecuación $P(x) = 0$.
- **Candidatos a raíz del polinomio:** son todos los divisores enteros (positivos y negativos) del término independiente.
- **Conjunto solución de una ecuación algebraica:** conjunto de todas las raíces de una ecuación.
- **Regla de Ruffini:** algoritmo que permite obtener fácilmente el cociente y el residuo de la división de un polinomio por un binomio de la forma $x - a$.

3.7.1. USOS DE LA REGLA DE RUFFINI

Esta regla se utiliza para:

1. **Dividir un polinomio entre un binomio** que sea de la **forma x – a**
2. **Resolver ecuaciones de tercer grado o mayor** permitiendo obtener soluciones enteras.
3. **Calcular las raíces de polinomios** de grado mayor o igual a 3.
4. **Factorizar polinomios** de tercer grado o mayor.

3.7.2. DESCRIPCIÓN DE LA REGLA DE RUFFINI

Para describir las distintas aplicaciones de este método trabajemos con varios ejemplos.

***PRIMER EJEMPLO** (caso de división de un polinomio entre un binomio):*

Para dividir el polinomio $P(x) = -2x^2 + x^3 + 12 - 11x$ entre el polinomio $Q(x) = x + 3$, utilizando la regla de Ruffini, se procede de la siguiente manera:

1. Se ordena el polinomio $P(x)$ de mayor a menor grado.

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$$

2. De la forma que sigue, se colocan los coeficientes de cada término. Si no hay algún término entre el de mayor grado y el de menor se coloca un 0.

	1	-2	-11	12

3. A la izquierda se pone el número opuesto que tiene $Q(x)$ en este caso -3 y se baja el coeficiente del término de mayor grado:

	1	-2	-11	12
-3				
	1			

4. Se multiplica el coeficiente que se ha bajado (1) por el que se ha colocado a la izquierda (-3). El resultado del producto se coloca debajo del coeficiente del término siguiente y se suman:

	1	-2	-11	12
-3		-3		
	1	-5		

5. El resultado de la suma se vuelve a multiplicar por el número situado a la izquierda y se repite el proceso:

	1	-2	-11	12
-3		-3	15	-12
	1	-5	4	0

6. El último número corresponde con al residuo de la división mientras que el resto de números de la fila inferior son los coeficientes del cociente.

En este caso, el residuo es 0 y el coeficiente $C(x) = x^2 - 5x + 4$ por lo tanto **(aplicando la regla de la división)**:

$$\underbrace{-2x^2 + x^3 + 12 - 11x}_{P(x)} = \underbrace{(x^2 - 5x + 4)}_{C(x)} \cdot \underbrace{(x + 3)}_{\substack{\text{Binomio} \\ \text{divisor}}} + \underbrace{0}_{\text{Residuo}}$$

SEGUNDO EJEMPLO (caso de resolución de ecuaciones de tercer grado o mayor):

Para resolver la ecuación $x^4 - 8x^2 - 18x = -2x^3 + 9$ utilizando la regla de Ruffini, se procede de la siguiente manera:

1. Se escribe la ecuación en forma canónica, para ello pasamos todos los términos al miembro de la izquierda y los escribimos de mayor a menor grado.

$$x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 18x - 9 = 0$$

2. Aplicamos la regla de Ruffini probando con aquellos valores enteros que sean divisores de 9: $\pm 1, \pm 3, \pm 9$ (candidatos a ser raíces del polinomio $E(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 18x - 9$):

	1	2	-8	-18	-9
-1		-1	-1	9	9
	1	1	-9	-9	0

3. Vemos que cuando $\mathbf{x_1 = -1}$ el resto es 0 por lo que es una raíz de la ecuación, la cual se puede escribir:

$$x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 18x - 9 = (x + 1) \cdot (x^3 + x^2 - 9x - 9)$$

4. Intentamos aplicar la regla de Ruffini con el segundo factor $x^3 + x^2 - 9x - 9$:

	1	1	-9	-9
-1		-1	0	9
	1	0	-9	0

5. Por lo tanto, nuevamente cuando $\mathbf{x_2 = -1}$ el resto es 0 por lo que es una raíz de la ecuación:

$$x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 18x - 9 = (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x^2 - 9)$$

6. Continuamos aplicando la regla de Ruffini con el tercer factor:

	1	0	-9
3		3	9
	1	3	0

7. Cuando $\mathbf{x_3 = 3}$ el resto es 0 por lo que es también raíz de esta ecuación.

$$x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 18x - 9 = (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x-3) \cdot (x+3)$$

8. Igualando a 0 el cuarto factor obtendríamos la cuarta raíz:

$$x + 3 = 0 \rightarrow \mathbf{x_4 = -3}$$

9. Hemos calculado ya las cuatro raíces de la ecuación:

$$\mathbf{x_1 = -1}$$
$$\mathbf{x_2 = -1}$$
$$\mathbf{x_3 = 3}$$
$$\mathbf{x_3 = -3}$$

Se pueden comprobar que las raíces obtenidas son correctas sustituyéndolas por el valor de x en la ecuación y comprobando que se cumple la igualdad y da 0.

<u>Caso de calcular las raíces de un polinomio:</u>

El caso del **cálculo de raíces de un polinomio** se ve con claridad en el ejemplo anterior. Cuando vamos aplicando la regla de Ruffini a un polinomio y vemos que los candidatos a raíz cumplen que el residuo es igual a 0 se obtiene una raíz del polinomio.

Cada vez que se hace una tabla a partir de los coeficientes del polinomio y el residuo es cero, se obtiene una raíz. Se aplica nuevamente el proceso con los coeficientes del cociente o polinomio reducido hasta llegar a uno cuyas raíces se puedan calcular fácilmente.

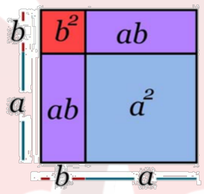
3.8. IDENTIDADES NOTABLES

En este apartado vamos a destacar una serie de productos concretos de polinomios que surgen frecuentemente.

Potencias de un binomio. Las siguientes igualdades se obtienen, simplemente, tras efectuar los oportunos cálculos:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.



Comprueba la igualdad a partir de los cuadrados y rectángulos de la ilustración.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

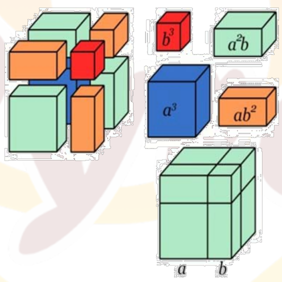
Observa la figura y conéctala con la igualdad.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Ratifica la igualdad con los cubos y prismas de la figura.

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Podemos observar que, en cada uno de los desarrollos, el exponente del binomio coincide con el grado de cada uno de los monomios.



Suma por diferencia. De nuevo la siguiente igualdad se obtiene tras efectuar el producto señalado:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados.

3.9. FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO

3.9.1. RAÍCES DE UN POLINOMIO

Dado un polinomio $P(x)$ que un número real concreto **a** es **una raíz**, o **un cero**, del polinomio P si al evaluar P en $x = a$ obtenemos el número 0, esto es, si

$$P(a) = 0$$

Para facilitar la comprensión de los conceptos y resultados de este asunto la mayoría de los números que han aparecido hasta ahora, coeficientes, raíces, etc., han sido números enteros. Por supuesto que podemos encontrarnos con polinomios con coeficientes racionales, o irracionales, o con polinomios con raíces dadas por una fracción o un número irracional. También existen polinomios que carecen de raíces.

Apreciamos que la regla de Ruffini nos informa sobre si un número concreto es o no raíz de un polinomio. Naturalmente, cuando estamos ante un polinomio, y nos interesa conocer sus raíces, no es posible efectuar una prueba con cada número real para determinar cuáles son raíz del polinomio. En el próximo párrafo destacaremos ciertos "números candidatos" a ser raíz de un polinomio.

A la hora de buscar las raíces enteras de un polinomio disponemos del siguiente resultado:

Dado un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

cuyos coeficientes son todos números enteros, sus **raíces enteras**, si las tuviera, se encuentran necesariamente entre los divisores enteros de su término independiente a_0.

Por tanto, en el polinomio $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ cuyos coeficientes son todos números enteros, sus **raíces racionales**, si las tuviera, necesariamente tienen por numerador algún divisor del término independiente, a_0, y por denominador algún divisor del coeficiente del término de mayor grado, a_n.

3.9.2. FACTORIZACIÓN

Todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales, alguna de las cuales puede aparecer repetida entre esos no más de n números reales.

Basándonos en el cálculo de las raíces de un polinomio vamos a realizar el proceso de descomposición de un polinomio en forma de producto de otros polinomios más sencillos. (Factorización de un polinomio):

Nos vamos a basar en el siguiente enunciado:

La **condición necesaria y suficiente** para que un polinomio $P(x)$ sea divisible por $(x - a)$ es que a sea una raíz de $P(x)$.

Podemos reescribir este resultado de la siguiente manera:

Un polinomio $P(x)$ es divisible por $(x - a) \leftrightarrow$ a es una raíz de $P(x)$.

Asimismo, se llega al resultado general siguiente:

Dado el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ cuyas n raíces son x_1, x_2,… x_n, dicho polinomio se puede descomponer factorialmente de la siguiente forma:

$$P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

Decimos que un polinomio es **reducible** si admite una factorización mediante polinomios de grado inferior al suyo. En caso contrario el polinomio será **irreducible**.

3.10. TRIÁNGULO DE TARTAGLIA

El **Triángulo de Tartaglia, también conocido como Triángulo de Pascal**, es una disposición triangular de números con numerosas propiedades y aplicaciones en diferentes áreas del conocimiento. Consiste en una secuencia triangular de números enteros que comienza con un «1» en el vértice superior y se expande hacia abajo con números calculados a partir de los números de la fila superior.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Cada número en el triángulo es la suma de los dos números directamente encima de él. Aunque el triángulo lleva el nombre de Blaise Pascal, un matemático francés del siglo XVII, ya era conocido desde varios siglos antes. De hecho, se han encontrado referencias a este triángulo en trabajos chinos que datan del siglo XI. En Italia, fue estudiado por Tartaglia, de ahí uno de sus nombres.

3.10.1. USOS DEL TRIÁNGULO DE TARTAGLIA

El Triángulo de Pascal tiene múltiples aplicaciones: cálculo de coeficientes binomiales, desarrollo de polinomios, propiedades matemáticas, geometría y fractales, teoría de números, análisis combinatorio y aplicaciones en ciencias naturales:

De entre ellas destacaremos las que nos interesan en este tema:

- **Cálculo de coeficientes binomiales**: Proporciona una forma rápida de determinarlos sin tener que calcularlos desde cero.
- **Desarrollo de polinomios**: Sirve para expandir binomios elevados a una potencia, facilitando la identificación de términos y coeficientes en la expansión.