MATEMÁTICAS

TEMA 11

PROBALIDAD. DEFINICIÓN. REGLA DE LAPLACE. COMBINATORIA Y PROBABILIDAD. TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL. TEOREMA DE BAYES.

"Las preguntas más importantes de la vida, de hecho, no son en su mayoría más que problemas de probabilidad."

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

1. PROBABILIDAD

1.1. DEFINICIONES

1.1.1. EXPERIMENTO ALEATORIO

Entendemos por **fenómeno o experimento aleatorio** es aquel que, manteniendo las mismas condiciones en la experiencia, no se puede predecir el resultado.

Podríamos citar como ejemplos de experimentos aleatorios:

a) Lanzar una moneda y anotar si sale cara o cruz.
b) Lanzar dos dados y anotar los números de las caras superiores.
c) Si en una urna hay bolas blancas y rojas, sacar una al azar y anotar el color.
d) Sacar, sin reemplazamiento, dos cartas de la baraja.
e) Abrir un libro y anotar la página por la que se ha abierto.

Sin embargo, calcular el coste de una mercancía, sabiendo el peso y el precio por kg, no es un experimento aleatorio. Tampoco lo es calcular el coste del recibo de la luz sabiendo el gasto.

Por otro lado, no son experimentos aleatorios:

f) Salir a la calle sin paraguas cuando llueve y ver si te mojas.
g) El precio de medio kilo de rosquillas, si las rosquillas cuestan a 3 € el kilo.
h) Soltar un objeto y ver si cae.

1.1.2. SUCESO ELEMENTAL, ESPACIO MUESTRAL Y SUCESO

Al realizar un experimento aleatorio existen varios **posibles resultados** o **sucesos posibles**. Siempre se obtendrá uno de los **posibles resultados**.

Se llama **suceso elemental** a cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio.

El conjunto de los posibles resultados de un experimento aleatorio se denomina **espacio muestral, E**.

Un **suceso** es un subconjunto del conjunto de posibles resultados, es decir, del espacio muestral.

*Por ejemplo, los posibles resultados al tirar una moneda son que salga cara o salga cruz. El conjunto de sucesos elementales es **E = {cara, cruz}**.*

*Otro ejemplo para entender estas definiciones sería el de lanzar un dado, siendo el conjunto de posibles resultados o espacio muestral **E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}**, el suceso obtener par {2, 4, 6}, el suceso obtener impar {1, 3, 5}, el suceso obtener múltiplo de 3 {3, 6}, o sacar un número menor que 3 {1, 2}.*

1.1.3. OPERACIONES CON SUCESOS

Dados dos sucesos A y B:

La **unión**: A ∪ B se verifica si se verifica A **o bien** si se verifica B.

La **intersección**: A ∩ B se verifica si se verifica A **y además** se verifica B.

La **diferencia**: A - B se verifica si se verifica A y **no** se verifica B.

La unión, intersección y diferencia de dos sucesos aleatorios, son también sucesos aleatorios.

1.1.4. SUCESO SEGURO, SUCESO IMPOSIBLE Y SUCESO CONTRARIO

Se considera que el espacio muestral, E, es un suceso al que se denomina **suceso seguro**, y que el conjunto vacío, ∅, es otro suceso, al que se llama **suceso imposible**.

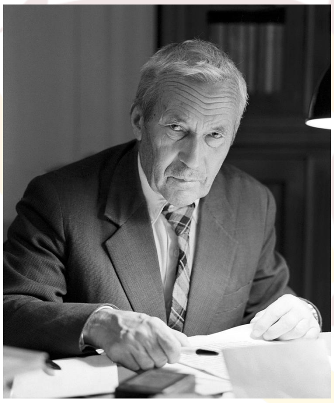
Dado un suceso A, se denomina **suceso contrario** (o **complementario**) de A, y se escribe $\overline{\mathrm{A}}$, (o A', A^{C}, o noA), al suceso E - A.

1.1.5. SUCESOS INCOMPATIBLES E INCOMPATIBLES

Dos sucesos A y B son **incompatibles** si A ∩ B = ∅. En caso contrario se llaman sucesos **compatibles**.

1.2. ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES

Existe una definición axiomática de probabilidad debida a *Kolmogorov* relativamente reciente (1930), pero antes ya había sido usado este concepto, por ejemplo por *Fermat* y *Pascal* en el siglo XVII que se escribieron cartas reflexionando sobre lo que ocurría en los juegos de azar. Cuando no comprendían cómo asignar una determinada probabilidad, jugaban muchas veces al juego que fuese y veían a qué valor se aproximaban las frecuencias relativas. Así, la **probabilidad de un suceso** podría definirse como el **límite al que tienden las frecuencias relativas** de ese suceso cuando el número de experimentos es muy alto.



***Andréi Nikoláyevich Kolmogórov** fue un matemático ruso que realizó aportes de primera línea en los contenidos de teoría de la probabilidad y de topología.*

Por tanto, para calcular probabilidades se usan dos técnicas, una **experimental**, *a posteriori*, analizando las **frecuencias relativas** de que ocurra el suceso, y la otra por simetría, *a priori*, cuando se sabe que los sucesos elementales son **equiprobables,** es decir, que **todos ellos tienen la misma probabilidad**, entonces **se divide el número de casos favorables por el número de casos posibles,** que se conoce como **Regla de Laplace.**

2. REGLA DE LAPLACE

Según la **regla de Laplace**, si los sucesos elementales son equiprobables, la probabilidad de un suceso A es el número de casos favorables dividido por el número de casos posibles.

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\text{número de casos favorables al suceso A}}{\text{número de casos posibles}}$$

La regla de Laplace está basada en el **principio de razón insuficiente**: si a priori no existe ninguna razón para suponer que un resultado se puede presentar con más probabilidad que los demás, podemos considerar que todos los resultados tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

2.1. LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

Jakob Bernoulli, en 1689, definió probabilidad utilizando la **Ley de los Grandes Números**, que dice que la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse cuando el número de pruebas tiende a infinito. A ese número al que tienden las frecuencias relativas lo llamó **probabilidad.**

Podemos intuir que esta definición tiene graves inconvenientes. No sabemos cuántas pruebas debemos realizar. Hay que hacer *muchas* y en las mismas condiciones. Se obtiene un valor aproximado de la probabilidad.

Veamos un ejemplo de aplicación de la regla de Laplace:

En una clase hay 15 chicos y 14 chicas. Como no se presenta nadie para ser delegado se hace un sorteo. ¿Cuál es la probabilidad de que en la clase haya delegada?

Como hay 14 chicas (los casos favorables) sobre una población de 29 individuos, de acuerdo con la Regla de Laplace, la probabilidad pedida es:

$$\mathrm{P(chica)} = \frac{\text{número de casos favorables al suceso}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{14}{29}$$

Otro ejemplo de aplicación esta Regla:

En el monedero tenemos 3 monedas de 1 céntimo, 7 monedas de 5 céntimos, 4 monedas de 10 céntimos y 2 monedas de 50 céntimos. Sacamos una moneda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la cantidad obtenida sea un número par de céntimos?

Al sacar una moneda, para tener un número par de céntimos tiene que ser de 10 céntimos o de 50 céntimos. Por tanto, el total de casos favorables es de 6 (hay 4 de 10 y 2 de 50). El número de casos posibles es el de monedas que tenemos en el monedero, que son 3 + 7 + 4 + 2 = 16.

La probabilidad de obtener un número par de céntimos es:

$$\mathrm{P(par\ de\ céntimos)} = \frac{\text{número de casos favorables al suceso}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

3. DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE PROBABILIDAD DEBIDA A KOLMOGOROV

El matemático Kolmogorov basándose en las propiedades del álgebra de sucesos y en las propiedades de las frecuencias relativas dio una definición de probabilidad basada en un sistema de axiomas.

La definición axiomática de Kolmogorov es más complicada que la que viene a continuación. Pero esta simplificación puede servirnos:

La **probabilidad** es una aplicación (función) que asigna a cada suceso A de un espacio muestral E un número real que debe verificar las siguientes propiedades:

$$\mathrm{E} \to \mathbb{R}$$

$$\mathrm{A} \to \mathrm{P(A)}$$

1. La probabilidad del suceso seguro es 1:

$$\mathrm{P(E)} = 1$$

2. La probabilidad de cualquier suceso siempre es un número no negativo:

$$\mathrm{P(A)} \geq 0, \text{para todo A.}$$

3. Si dos sucesos son incompatibles entonces la probabilidad de la unión es la suma de sus probabilidades:

$$\text{Si } \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset \text{ entonces } \mathrm{P(A \cup B)} = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)}$$

Las dos últimas las verifican todas las medidas. La probabilidad es una medida.

3.1. CONSECUENCIAS DE LOS AXIOMAS

De estos axiomas se deducen las siguientes propiedades:

a) La probabilidad del suceso contrario es 1 menos la probabilidad del suceso:

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{P(A)}$$

Demostración:

En efecto, un suceso y su suceso contrario son incompatibles, y su unión es el suceso seguro. Por lo que usando los axiomas 1 y 3 se tiene:

$$1 = \mathrm{P(E)} = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \overline{\mathrm{A}}) = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) \to \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{P(A)}$$

b) La probabilidad del suceso imposible es 0:

$$\mathrm{P}(\emptyset) = 0$$

Demostración:

En efecto, el suceso imposible es el suceso contrario del suceso seguro, por lo utilizando la propiedad anterior y el axioma 1, se tiene:

$$\mathrm{P}(\emptyset) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{E}}) = 1 - \mathrm{P(E)} = 1 - 1 = 0$$

c) La probabilidad de un suceso (finito) es la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen.

Demostración:

En efecto, los sucesos elementales son incompatibles entre sí, luego si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ por el axioma 3 se tiene que:

$$P(A) = P\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = P(a_1) + P(a_2) + \cdots + P(a_n)$$

Si los sucesos elementales son equiprobables de esta propiedad se deduce la regla de *Laplace*.

d) La probabilidad de la unión de sucesos disjuntos dos a dos es igual a la suma de las probabilidades:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

Demostración:

Son sucesos incompatibles entre sí, luego se verifica por el axioma 3

Para comprobar esta axiomática veámoslo con un ejemplo sencillo:

*¿Cuál es la probabilidad de sacar un as en la baraja de 40 cartas? ¿Y de **no** sacar un as? ¿Y de sacar una copa? ¿Y de **no** sacar una copa?*

*El suceso no sacar un as es el suceso **contrario** al de sacar un as. Cartas que no son ases hay 36, luego la probabilidad de no sacar as es 36/40 = 9/10. Observa que se obtiene que P(as) + P(no as) = 1/10 + 9/10 = 10/10 = 1.*

*La probabilidad de sacar copa es 10/40, y hay 30 cartas que no son copas, luego la probabilidad de **no** sacar copa es 30/40, y 10/40 + 30/40 = 1.*

3.2. AXIOMÁTICA APLICADA A LOS SUCESOS COMPATIBLES E INCOMPATIBLES

Llamamos **sucesos incompatibles** a los que, como copa y oro, no pueden realizarse a la vez, que su intersección es el suceso imposible, y **sucesos compatibles** a los que, como as y oro, pueden realizarse a la vez.

Designamos $P(A \cup B)$ a la probabilidad del suceso "se verifica A o bien se verifica B".

Hemos visto en el ejemplo que si los sucesos son incompatibles su probabilidad es igual a la suma de las probabilidades, pues se verifica el axioma 3 de Kolmogorov.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si A y B son incompatibles.

Pero si A y B tienen una intersección no vacía, pueden verificarse a la vez, habrá que restar esos casos, esas veces en que se verifican A y B a la vez.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, si A y B son compatibles.

Esta segunda expresión es más general que la primera, ya que en el caso en que A y B son incompatibles entonces P(A ∩ B) = 0.

Para entender mejor estas definiciones veámoslo con un ejemplo sencillo:

Calcula la probabilidad de los sucesos siguientes:

a) Sacar un rey o una figura.
b) No sale un rey o sale un rey.
c) Sacar un basto o una figura.

a) Hay 4 reyes y hay 4 · 4 = 16 figuras (as, sota, caballo y rey), pero los cuatro reyes son figuras, por tanto P(rey ∪ figura) = 4/40 + 16/40 – 4/40 = 16/40 = 0,4.

b) Hay 40 – 4 = 36 cartas que no son reyes, y hay 4 reyes, luego P(no rey ∪ rey) = 36/40 + 4/40 = 1.

Esta conclusión es más general. Siempre:

$$\mathbf{P(A \cup \overline{A}) = 1}$$

pues un suceso y su contrario ya vimos que verificaban que $\mathbf{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$.

c) Hay 10 bastos y hay 162 figuras, pero hay 4 figuras que son a la vez bastos (as, sota, caballo y rey), luego P(basto ∪ figura) = 10/40 + 16/40 – 4/40 = 22/40 = 11/20.

3.3. AXIOMÁTICA APLICADA A SUCESOS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES

Imaginemos que tenemos una bolsa con 3 bolas rojas y 2 bolas negras. ¿Cuál es la probabilidad de *sacar una bola roja*? Si sacamos dos bolas, ¿cuál es la probabilidad de *sacar dos bolas rojas*?

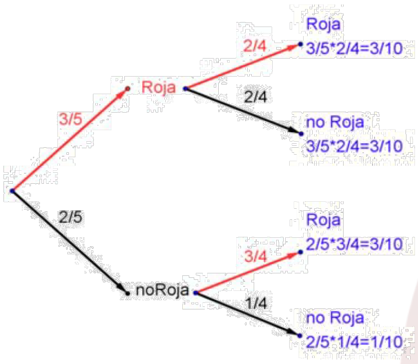
La probabilidad de sacar una bola roja es 3/5. Pero la de sacar dos bolas rojas, ¡depende! Depende de si volvemos a meter en la bolsa la primera bola roja, o si la dejamos fuera. En el primer caso decimos que es **con reemplazamiento** y en el segundo, **sin reemplazamiento**.

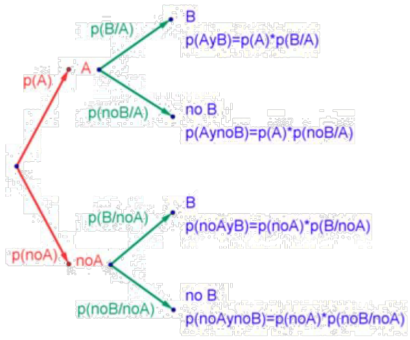
Si la volvemos a meter, la probabilidad de sacar bola roja volverá a ser 3/5, y la probabilidad de sacar dos bolas rojas es 3/5 · 3/5 = 9/25. La probabilidad de esta segunda bola *no depende* de lo que ya hayamos sacado, y en este caso la probabilidad se obtiene multiplicando.

Si los sucesos A y B son **independientes: P(A ∩ B) = P(A) · P(B)**

Pero si la dejamos fuera, ahora en la bolsa sólo hay 4 bolas y de ellas sólo quedan 2 bolas rojas, luego la probabilidad de que esa segunda bola sea roja es 2/4, y está condicionada por lo que antes hayamos sacado. Se escribe: P(Roja/Roja) y se lee *"probabilidad de Roja condicionado a haber sacado Roja"*. La probabilidad de sacar dos bolas rojas es ahora: 3/5 · 2/4 = 6/20 = 3/10.

Observa el diagrama de árbol (concepto que veremos un poco más adelante en detenimiento) y comprueba que la probabilidad de sacar primero una bola roja y luego una bola negra (no Roja) es 3/5 · 2/4 = 3/10 pues después de sacar una bola roja en la bolsa quedan sólo 4 bolas y de ellas 2 son negras. La probabilidad de sacar primero una bola negra (no Roja) y luego bola Roja es 2/5 · 3/4 = 6/20 = 3/10, y la de sacar dos bolas negras es: 2/5 · 1/4 = 2/20 = 1/10.





Pero observa más cosas. Por ejemplo, sumando las probabilidades de *Roja* y *noRoja* se obtiene: 3/5 + 2/5 = 1; y lo mismo en las otras ramas del árbol: 2/4 + 2/4 = 1; 3/4 + 1/4 = 1; e incluso sumando todas las probabilidades finales: 3/10 + 3/10 + 3/10 + 1/10 = 1.

Los sucesos son dependientes. El que ocurra A, o no ocurra A, afecta a la probabilidad de B. Por eso se dice que B **está condicionado** a A.

Si los sucesos A y B son **dependientes** entonces:

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)}$$

Veámoslo con un ejemplo:

Sacamos dos cartas de una baraja de 40 cartas sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos ases?

Si fuera con reemplazamiento la probabilidad sería 4/40 · 4/40, pero al ser sin reemplazamiento la probabilidad del segundo as viene condicionada por que hayamos sacado un as previamente. Ahora en la baraja ya no quedan 40 cartas sino 39, y no quedan 4 ases sino sólo 3, luego la probabilidad es:

4/40 · 3/39 = 1/130.

Si dos sucesos son **dependientes** entonces: $\mathbf{P(B/A) \neq P(B)}$.

Pero si dos sucesos son **independientes** entonces: $\mathbf{P(B/A) = P(B/\overline{A}) = P(B)}$.

Por tanto, la expresión: $\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)}$ es general, ya que si los sucesos son independientes entonces $\mathbf{P(B/A) = P(B)}$ y por tanto $\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A) \cdot P(B)}$.

CUADRO RESUMEN

Unión de un suceso y su contrario: $\mathrm{P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1}$

Intersección de sucesos dependientes: $\mathrm{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)}$

Intersección de sucesos independientes: $\mathrm{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$

Unión de sucesos compatibles: $\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

Unión de sucesos compatibles: $\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

4. DIAGRAMAS DE ÁRBOL Y TABLAS DE CONTINGENCIA

4.1. DIAGRAMAS DE ÁRBOL

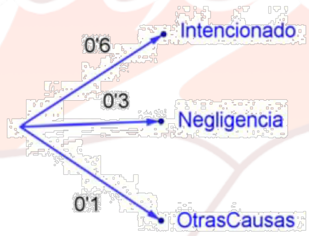
Un **diagrama de árbol** es una representación gráfica utilizada para mostrar datos que siguen un modelo jerárquico. Proveniente de la semejanza de un árbol, utiliza ramas para representar la subdivisión de actividades o procesos.

Tanto en entornos académicos como profesionales, ayudas visuales como los diagramas de árbol simplifican temas intrincados, facilitando la comprensión y el compromiso de las partes interesadas con el contenido.

Con ellos, se pueden representar los distintos sucesos en un problema de probabilidad de forma ordenada, lo que supone una ayuda muy útil y una sistematización del proceso de resolución de dichos problemas.

Usemos este tipo de diagramas para la resolución del siguiente ejemplo:

Se hace un estudio sobre los incendios y se comprueba que en una determinada zona el 60 % de los incendios son intencionados, un 30 % se deben a negligencias y 10 % a causas naturales como rayos o a otras causas. Representa esta situación con un diagrama de árbol.



Si consideramos que la probabilidad de que un incendio sea intencionado es 0.6, ¿cuál es la probabilidad de que, al considerar dos incendios, al menos uno haya sido intencionado?

Llamamos I al suceso "ser intencionado" y I = no$I$ al suceso "no ser intencionado". Representamos la situación en un diagrama de árbol. Como el que un incendio sea intencionado es independiente de cómo sea el segundo, tenemos que:

$$P(I \cap I) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36$$

$$P(I \cap \bar{I}) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24$$

ya que es la probabilidad de que el primer incendio sea intencionado y el segundo no.

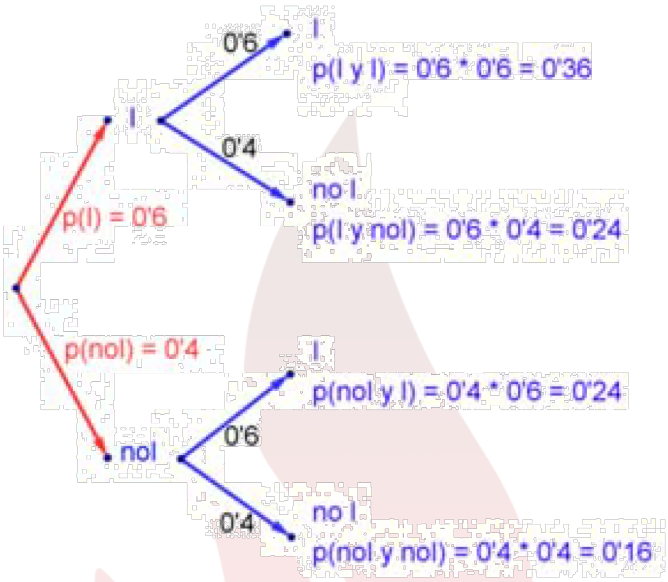
$$P(\bar{I} \cap I) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$$

$$P(\bar{I} \cap \bar{I}) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$$

La probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado la podemos calcular sumando las probabilidades de: $(I \cap I)$, $(I \cap \bar{I})$ y $(\bar{I} \cap I)$ que es 0,36 + 0,24 + 0,24 = 0;84. Pero más sencillo es calcular la probabilidad del suceso contrario:

$$P(noI \cap noI) = P(\bar{I} \cap \bar{I}) = 0{,}16 \text{ y restarla de 1}$$

$$P(al\ menos\ uno\ intencionado) = 1 - 0{,}16 = 0{,}84$$



4.2. TABLAS DE CONTINGENCIA

Entendemos por **tablas de contingencia** a aquellas cuyas celdas figuran probabilidades, y en la cual podemos determinar unas probabilidades a partir de otras que ya conocemos en la tabla.

En estadística, se emplean para registrar y analizar la asociación entre dos o más variables. Consiste en crear al menos dos filas y dos columnas para representar datos categóricos en términos de conteos de frecuencia.

Esta herramienta, que también se conoce como tabla cruzada o como tabla de dos vías.

Con el siguiente ejemplo veamos cómo funciona el uso de estas tablas:

Se han estudiado 500 enfermos del hígado analizando por un procedimiento nuevo si las lesiones son benignas o malignas. Luego se les volvió a analizar por el procedimiento usual determinando qué diagnósticos habían sido correctos y cuáles incorrectos. Los valores obtenidos se representan en la tabla:

	Diagnóstico correcto	Diagnóstico incorrecto	Totales
Lesión maligna	206	12	218
Lesión benigna	268	14	282
Todas	474	26	500

Determinamos la tabla de frecuencias relativas:

	Diagnóstico correcto (C)	Diagnóstico incorrecto (I)	Totales
Lesión maligna (M)	0,412	0,024	0,436
Lesión benigna (B)	0,536	0,028	0,564
Todas	0,948	0,052	1

Imagina que estas frecuencias relativas pudieran tomarse como probabilidades. Interpreta entonces el significado de cada uno de estos valores.

0,412 sería la probabilidad de que el diagnóstico de lesión maligna fuese correcto: $P(M \cap C)$.

$$0{,}024 = P(M \cap C)$$

$$0{,}536 = P(B \cap C)$$

$$0{,}028 = P(B \cap I)$$

¿Y 0,436? El número de lesiones malignas es 218, luego $0{,}028 = P(M)$.

Del mismo modo:

$$0{,}564 = P(B)$$

$$0{,}948 = P(C)$$

$$0{,}052 = P(I)$$

Observa que $P(M)$ + $P(B)$ = 1 y que $P(C)$ + $P(I)$ = 1. Son sucesos contrarios.

¿Son dependientes o independientes los sucesos M y C?

$P(M \cap C)$ = $P(M) \cdot P(C/M)$, por tanto: 0,412 = 0,436 · $P(C/M)$, de donde $P(C/M)$ = 0,412/0,436 = 0,945 que es distinto de 0,948 que es la probabilidad de C. Se puede afirmar que M y C son dependientes ya que $P(C/M) \neq P(C)$. Pero si redondeamos a dos cifras decimales $P(C/M)$ = 0.95 = $P(C)$, y en este caso consideramos que son sucesos independientes.

Visto todo esto, en general se denomina tabla de contingencias a:

	A	$NoA = \bar{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$NoB = \bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

En una tabla de contingencia figuran todas las probabilidades o contingencias de los sucesos compuestos.

4.3. RELACIÓN ENTRE DIAGRAMAS DE ÁRBOL Y TABLAS DE CONTINGENCIA

Los diagramas de árbol y las tablas de contingencia están relacionados. Dado un árbol puedes obtener una tabla de contingencia, y viceversa. Tiene interés esta relación pues con los datos del problema a veces es más sencillo construir uno de ellos y dar la solución pasando al otro.

Veámoslo en el siguiente ejercicio de ejemplo:

Dada la tabla de contingencia, obtener el diagrama de árbol que comienza con A y noA = A .

	A	$NoA = \bar{A}$	
B	2/9	5/9	7/9
$NoB = \bar{B}$	1/9	1/9	2/9
	3/9 = 1/3	6/9 = 2/3	1

Conocemos la P(A) = 3/9 = 1/3, P($\bar{A}$) = 6/9 = 2/3, P(B) = 7/9 y P($\bar{B}$) = 2/9.

También conocemos P($A \cap B$) = 2/9; P($A \cap \bar{B}$) =1/9; P($\bar{A} \cap B$) = 5/9 y P($\bar{A} \cap \bar{B}$) = 1/9.

Nos falta conocer P(B/A) que podemos obtener dividiendo P($A \cap B$) entre P(A):

P(B/A) = P($A \cap B$)/P(A) = 2/9 : 3/9 = 2/3.

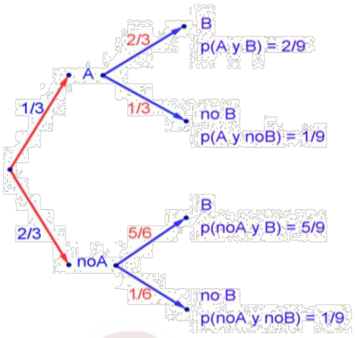
Del mismo modo calculamos:

$P(\bar{B}/A) = P(A \cap \bar{B})/P(A) = 1/9 : 3/9 = 1/3$

$P(B/\bar{A}) = P(\bar{A} \cap B)/P(\bar{A}) = 5/9 : 6/9 = 5/6$

$P(\bar{B}/\bar{A}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})/P(\bar{A}) = 1/9 : 6/9 = 1/6$.

El árbol es:



5. TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL Y TEOREMA DE BAYES

Thomas Bayes en 1763 enunció el teorema que lleva su nombre. Sirve para resolver problemas del tipo de "conocemos la probabilidad de que un enfermo que tiene hepatitis esté algo amarillo. Calcula la probabilidad de que alguien que esté algo amarillo, tenga hepatitis". Es decir, permite calcular la probabilidad de A/B conociendo la probabilidad de B/A (o mejor, las probabilidades de B condicionado a un conjunto de sucesos A_i tales que son incompatibles dos a dos y cuya unión es todo el espacio muestral).

Vamos a enunciar dicho teorema, pero previamente enunciaremos el teorema de la probabilidad total, que es como un paso intermedio del teorema de *Bayes*.

5.1. ENUNCIADO DEL TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Sean $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un sistema completo de sucesos incompatibles dos a dos, con probabilidades no nulas, suma de probabilidades 1. Sea B otro suceso del que conocemos las probabilidades condicionadas: $P(B/A_i)$. Entonces:

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)$$

5.2. ENUNCIADO DEL TEOREMA DE BAYES

Sean $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un sistema completo de sucesos incompatibles dos a dos, con probabilidades no nulas, suma de probabilidades 1. Sea B otro suceso del que conocemos las probabilidades condicionadas: $P(B/A_i)$. Entonces:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)}$$

Para **resolver problemas tipo Bayes** basta construir un diagrama de árbol, luego la tabla de contingencia asociada, y a continuación el otro diagrama de árbol.

Apliquemos ambos teoremas para la resolución del siguiente ejercicio:

Tenemos un conjunto de sucesos $\{A_1, A_2, A_3\}$ tales que $E = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, y son incompatibles dos a dos. Conocemos sus probabilidades:

$P(A_1) = 0,3$

$P(A_2) = 0,5$

$P(A_3) = 0,2$

Tenemos otros dos sucesos incompatibles, A y B, de los que conocemos las probabilidades condicionadas que son:

$P(A/A1) = 0,4$

$P(B/A1) = 0,6$

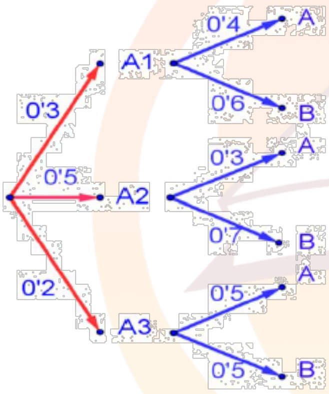
$P(A/A2) = 0,3$

$P(B/A2) = 0,7$

$P(A/A3) = 0,5$

$P(B/A3) = 0,5$

Queremos calcular $P(A_1/B)$. Para ello confeccionamos un árbol con los datos que tenemos.



Ahora podemos calcular las probabilidades de las intersecciones. Ya sabes que:

$P(A_1 \cap A) = P(A_1) \cdot P(A /A_1) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$

$P(A_1 \cap B) = P(A_1) \cdot P(B /A_1) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18$

$P(A_2 \cap A) = P(A_2) \cdot P(A /A_2) = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15$

$P(A_2 \cap B) = P(A_2) \cdot P(B /A_2) = 0,5 \cdot 0,7 = 0,35$

$P(A_3 \cap A) = P(A_3) \cdot P(A /A_3) = 0,2 \cdot 0,5 = 0,10$

$P(A_3 \cap B) = P(A_3) \cdot P(B /A_3) = 0,2 \cdot 0,5 = 0,10$

Llevamos estos resultados a la tabla de contingencia asociada:

	A_1	A_2	A_3	
A	$P(A_1 \cap A) = 0{,}12$	$P(A_2 \cap A) = 0{,}15$	$P(A_3 \cap A) = 0{,}10$	$P(A) = 0{,}12 + 0{,}15 + 0{,}10 = 0{,}37$
B	$P(A_1 \cap B) = 0{,}18$	$P(A_2 \cap B) = 0{,}35$	$P(A_3 \cap B) = 0{,}10$	$P(B) = 0{,}18 + 0{,}35 + 0{,}10 = 0{,}63$
	$P(A_1) = 0{,}12 + 0{,}18 = 0{,}3$	$P(A_2) = 0{,}15 + 0{,}35 = 0{,}5$	$P(A_3) = 0{,}10 + 0{,}10 = 0{,}2$	1

Sumando columnas comprobamos que no nos estamos equivocando en los cálculos pues las probabilidades que obtenemos:

$P(A_1) = 0{,}12 + 0{,}18 = 0{,}3$

$P(A_2) = 0{,}15 + 0{,}35 = 0{,}5$

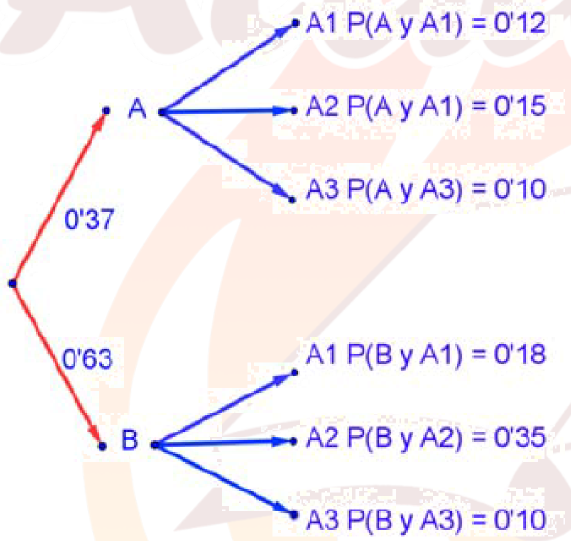
$P(A_3) = 0{,}10 + 0{,}10 = 0{,}2$

Sumando por filas obtenemos las probabilidades:

$P(A) = 0{,}12 + 0{,}15 + 0{,}1 = 0{,}37$

$P(B) = 0{,}18 + 0{,}35 + 0{,}10 = 0{,}63$

Con estas probabilidades podemos construir el otro árbol.



Ahora ya es posible calcular las otras probabilidades condicionadas, utilizando las probabilidades de la intersección y dividiendo:

$P(A_1/A) = P(A_1 \cap A) : P(A) = 0{,}12/0{,}37 = 12/37$

$P(A_2/A) = P(A_2 \cap A) : P(A) = 0{,}15/0{,}37 = 15/37$

$P(A_3/A) = P(A_3 \cap A) : P(A) = 0{,}10/0{,}37 = 10/37$

$P(A_1/B) = P(A_1 \cap B) : P(B) = 0{,}18/0{,}63 = 18/63$

$P(A_2/B) = P(A_2 \cap B) : P(B) = 0{,}35/0{,}63 = 35/63$

$P(A_3/B) = P(A_3 \cap B) : P(B) = 0{,}10/0{,}63 = 10/63$

La probabilidad pedida $P(A_1/B) = 18/63 = 2/7$

6. COMBINATORIA

Se entiende por **combinatoria** a la rama de la matemática que estudia las ordenaciones o agrupaciones de un determinado número de elementos u objetos. Constituye una herramienta que nos permite contar el número de situaciones que se pueden dar al someter a un conjunto finito a las acciones de ordenar y/o elegir entre sus elementos.

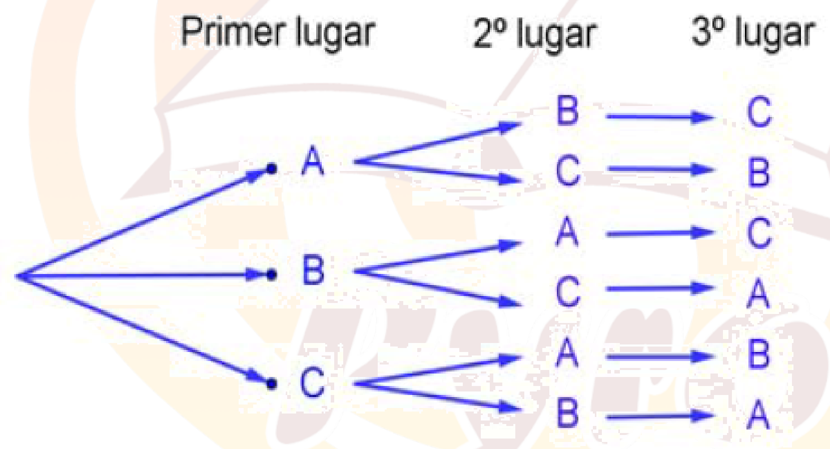
La combinatoria nos puede ser muy útil para calcular los sucesos posibles y favorables para posteriormente aplicar la regla de Laplace.

Veamos un ejemplo con el que entender esto:

En una fiesta se cuenta con tres grupos musicales que deben actuar. Para organizar el orden de actuación, ¿cuántas posibilidades distintas hay?

Para plantear este problema podemos usar un diagrama en árbol, herramienta la cual nos va a ayudar mucho a resolver los problemas de combinatoria. Llamamos a los tres grupos musicales A, B y C.

- *Primer nivel del árbol: En primer lugar podrán actuar o bien A, o bien B o bien C.*
- *Segundo nivel del árbol: Una vez que el grupo A ha sido elegido para actuar en primer lugar, para el segundo puesto sólo podremos colocar a B o a C. Igualmente, si ya B va en primer lugar, sólo podrán estar en el segundo lugar A o C. Y si actúa en primer lugar C, para el segundo puesto las opciones son A y B.*
- *Tercer nivel del árbol: Si ya se hubiera decidido que en primer lugar actúa el grupo A y en segundo el grupo B, ¿para el tercer lugar, que se puede decidir? Sólo nos queda el grupo C, y de la misma manera, en todos los otros casos, sólo queda una única posibilidad*



Confeccionar el diagrama en árbol, incluso únicamente comenzar a confeccionarlo, nos permite contar con seguridad y facilidad. Para saber cuántas formas tenemos de organizar el concierto, aplicamos el principio de multiplicación: sólo tenemos que multiplicar los números de ramificaciones que hay en cada nivel: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas de organizar el orden de actuación de los grupos. También permite escribir esas seis posibles formas sin más que seguir las distintas ramas del diagrama: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

6.1. COMBINATORIA APLICADA A LA PROBABILIDAD

Para poder aplicar la combinatoria en la probabilidad primero debemos conocer los conceptos básicos de combinatoria, tales como permutaciones, variaciones, etc.

6.1.1. PERMUTACIONES

Llamamos **permutaciones** a las posibles formas distintas en que se puede ordenar un conjunto de elementos distintos.

Otra manera de decirlo sería que una **permutación** es un **ordenamiento completo** de todos los elementos de un conjunto.

Se utilizan todos los elementos **y el orden importa**.

Ejemplos de permutaciones:

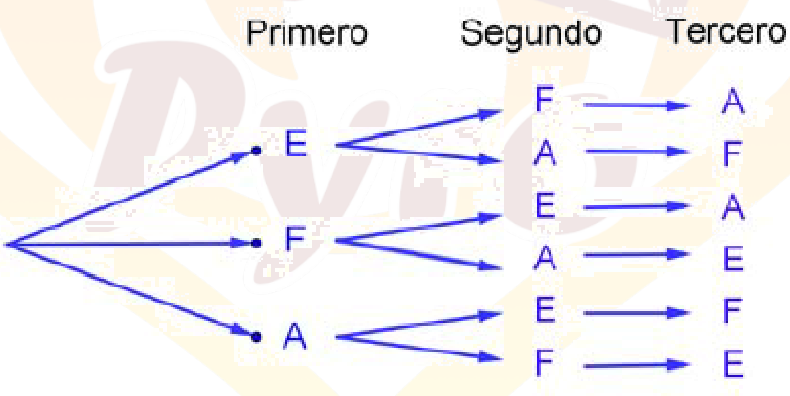
- *Las formas en que pueden llegar a la meta 10 corredores.*
- *Las palabras de cuatro letras, sin repetir ninguna letra, con o sin sentido que podemos formar con las letras de la palabra MESA.*
- *Los números de 5 cifras distintas que se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4 y 5.*

El número de permutaciones de un conjunto de n elementos se designa por $\mathrm{P_n}$, y se lee **permutaciones de n elementos**.

En el ejemplo de los tres grupos musicales que consistía en una ordenación de elementos, se escribiría $\mathrm{P_3}$, y se lee permutaciones de 3 elementos.

Con el siguiente ejemplo se entenderá más fácilmente el concepto de permutación:

En la fase preparatoria de un campeonato del mundo están en el mismo grupo España, Francia y Alemania. Indica de cuántas formas pueden quedar clasificados estos tres países.



Son permutaciones de 3 elementos: P_3. Hacemos un diagrama de árbol. Pueden quedar primeros España (E), Francia (F) o Alemania (A). Si ha ganado España, pueden optar por el segundo puesto F o A. Y si ya hubiesen ganado España y luego Francia, para el tercer puesto sólo quedaría Alemania.

Pueden quedar de 3 · 2 · 1 = 6 formas distintas.

El número de permutaciones de un conjunto de n elementos se designa por P_n, y se lee **permutaciones de n elementos**.

6.1.2. FACTORIAL DE N

En general para calcular las permutaciones de n elementos se multiplica n por n – 1, y así, bajando de uno en uno, hasta llegar a 1:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

A este número se le llama **factorial de n**, y se indica **n!**

Corresponde a un árbol de n niveles con n, n – 1, n – 2, …, 3, 2, 1 posibilidades de elección respectivamente.

Ejemplos:

- *Las formas en que pueden llegar a la meta 10 corredores son:*

$$\mathbf{P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800}$$

- *Las palabras con o sin sentido que podemos formar con las letras, sin repetir, de la palabra MESA son:*

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

- *Los números de 5 cifras, todas distintas, que se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4 y 5 son:*

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

6.1.3. CÁLCULO DE COCIENTES CON FACTORIALES

Cuando calculamos cocientes con factoriales siempre simplificamos la expresión, eliminando los factores del numerador que sean comunes con factores del denominador, antes de hacer las operaciones. En general siempre suele ser preferible simplificar antes de operar, pero en este caso resulta imprescindible, para que no salgan números demasiado grandes.

Podemos ejemplificar esto con el cálculo de $\frac{6!}{3!}$:

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

6.1.4. PERMUTACIONES CON ELEMENTOS REPETIDOS

Cuando en un conjunto hay elementos que se repiten, hay menos formas de ordenarlos, porque intercambiar elementos idénticos no cambia el resultado.

Si tienes un conjunto de n elementos, donde se repiten a, b, c… elementos, la fórmula para contar las **permutaciones distintas** es:

$$P = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c! \cdot \ldots}$$

Ejemplo:

¿Cuántas formas distintas hay de ordenar las letras de la palabra "MURMURAR"?

Letras: M, U, R, M, U, R, A, R

8 letras en total teniendo en cuenta que M se repite 2 veces, U se repite 2 veces, R se repite 3 veces, A aparece 1 vez.

$$P = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{40320}{2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 1} = \frac{40320}{24} = 1680$$

Hay 1680 formas distintas de ordenar las letras de la palabra "MURMURAR"

En resumen:

- La fórmula clásica n! sirve solo si todos los elementos son distintos.
- Si hay repeticiones, se divide entre el factorial del número de veces que se repite cada elemento indistinguible.

6.1.5. VARIACIONES SIN REPETICIÓN

Las **variaciones sin repetición** (o simplemente **variaciones**) de m elementos tomados de n en n se designan como $\mathrm{V_{m,n}}$. Son los grupos de n elementos distintos que se pueden formar de modo que un grupo se diferencie de otro bien por los **elementos** que lo componen bien por el **orden** en que aparecen.

Dicho de otro modo, es una **selección ordenada** de algunos elementos de un conjunto, **sin repetirlos.**

El número de variaciones es igual al producto de multiplicar n factores partiendo de m y decreciendo de uno en uno:

$$\mathrm{V_{m,n}} = \mathrm{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)} = \frac{\mathrm{m!}}{\mathrm{(m-n)!}}$$

Observaciones:

1. m debe ser siempre mayor o igual que n.
2. Las variaciones de m elementos tomados de m en m coinciden con las permutaciones de m elementos: $\mathrm{V_{m,m}} = \mathrm{P_m}$.
3. En general el último elemento es (m – n + 1).
4. Hemos dicho que $\mathrm{V_{m,m}} = \mathrm{P_m}$ pero si utilizamos la fórmula con factoriales tenemos que:

$\mathrm{V_{m,m}} = \mathrm{P_m} = \frac{\mathrm{m!}}{\mathrm{(m-m)!}} = \frac{\mathrm{m!}}{0!}$, asignando a 0! el valor de 1.

Ejemplo:

¿Cuántas formas hay de seleccionar 2 letras distintas (ordenadas) de A, B, C?

$$V_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6$$

AB, AC, BA, BC, CA, CB

6.1.6. VARIACIONES CON REPETICIÓN

Las **variaciones con repetición** son las diferentes secuencias de longitud n que se pueden formar con un conjunto de m elementos diferentes. Se denominan **variaciones con repetición** de m elementos tomados de m en n.

Dicho de otro modo, es una **selección ordenada** de algunos elementos de un conjunto que **se pueden repetir.**

El número de diferentes secuencias que se pueden formar se designa con la expresión $\mathrm{VR}_{\mathrm{m,n}}$ y se calcula con la fórmula:

$$\mathrm{VR}_{\mathrm{m,n}} = \mathrm{m}^{\mathrm{n}}$$

Ejemplo 1:

¿Cuántas formas hay de seleccionar 2 letras (ordenadas) de A, B, C permitiendo repetir?

$$VR_{3,2} = 3^2 = 9$$

AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC

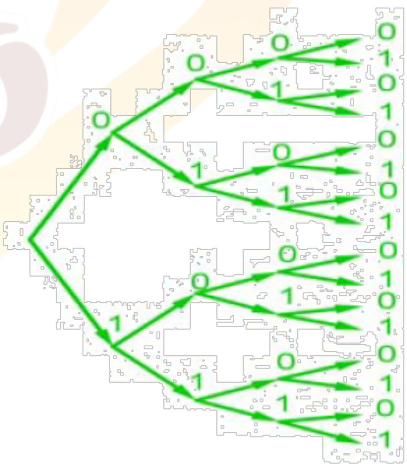
Ejemplo 2:

Este concepto se aprecia claramente en el caso de las quinielas. Como sabrás, estas consisten en adivinar los resultados de 14 partidos de fútbol señalando un 1 si pensamos que ganará el equipo de casa, un 2 si gana el visitante y una X si esperamos que haya empate. En una misma jornada, ¿cuántas quinielas distintas podían rellenarse?

Observa que ahora cada diferente quiniela consiste en una secuencia de los símbolos 1, 2 y X, en las que el mismo símbolo puede aparecer varias veces **repetido** a lo largo de la secuencia y dos quinielas pueden diferenciarse por los **elementos** que la componen o por el **orden** en que aparecen. Antes de resolver este problema, resolveremos uno más fácil.

Con dos símbolos, 0 y 1, ¿cuántas tiras de 4 símbolos se pueden escribir?

Igual que en anteriores ejemplos, formamos el diagrama de árbol.



Observando que en el primer lugar de la tira podemos poner los dos símbolos. En el segundo lugar, aunque hayamos puesto el 0, como se puede repetir, podemos volver a poner el 0 y el 1. Lo mismo en el tercer y en el cuarto lugar. Es decir, el número de ramificaciones no se va reduciendo, siempre es igual, por lo tanto, el número de tiras distintas que podemos formar es:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16 \text{ tiras distintas}$$

Desde el punto de vista de las variaciones, el problema nos plantea una variación con repetición de 2 elementos tomados de 4 en 4:

$$\mathrm{VR}_{2,4} = 2^4 = 16 \text{ tiras distintas}$$

Volviendo al caso que planteábamos al principio, el de cuántas quinielas distintas podían rellenarse, en el cálculo del número de quinielas distintas, los elementos son 3 (1, 2, X) y se forman secuencias de longitud 14, por lo tanto se trata de variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 14 en 14:

$$\mathrm{VR}_{3,14} = 3^{14} = 4782969 \text{ tiras distintas}$$

Para tener la certeza absoluta de conseguir 14 aciertos hay que rellenar 4782969 apuestas simples. Por tanto, la probabilidad de que te toque una quiniela en una apuesta simple es:

$$\mathrm{P(Q)} = \frac{\text{sucesos favorables}}{\text{sucesos posibles}} = \frac{1}{4782969}$$

6.1.7. COMBINACIONES

Se llama **combinaciones** de m elementos tomados de n en n y se designa $C_{m,n}$ a los grupos de n elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de m elementos diferentes entre sí, de modo que cada grupo se diferencie de los demás por los **elementos** que lo forman (no por el orden en que aparecen).

Dicho de otro modo, una combinación es una selección **sin orden de elementos, sin repetición**.

El número de diferentes combinaciones que se pueden formar se designa con la expresión $\mathrm{C_{m,n}}$ y se calcula con la fórmula:

$$\mathrm{C_{m,n}} = \frac{\mathrm{V_{m,n}}}{\mathrm{P_n}} = \frac{\mathrm{m!}}{\mathrm{(m-n)! \cdot n!}}$$

Ejemplo 1:

¿Cuántas formas hay de elegir 2 letras de A, B, C si no importa el orden?

$$C_{3,2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$$

AB, AC, BC (BA, CA, CB son iguales porque el orden no importa)

Ejemplo 2:

En una librería quieren hacer paquetes de tres libros, usando los seis libros más leídos. ¿Cuántos paquetes diferentes podrán hacer?

En este caso cada grupo de tres libros se diferenciará de los otros posibles por los libros (elementos) que lo componen, sin que importe el orden en que estos se empaquetan. A esta agrupación se la denomina combinación. Designamos los libros con las letras A, B, C, D, E y F.

Paquetes con A				Paquetes sin A pero con B			Paquetes sin A ni B pero con C		
ABC				BCD			CDE		
ABD	ACD			BCE	BDE		CDF	CEF	DEF
ABE	ACE	ADE		BCF	BDF	BEF			
ABF	ACF	ADF	AEF						

Hemos formado primero todos los paquetes que contienen el libro A, hay 10; Luego seguimos

formando los que no contienen el libro A pero si contienen el B. Luego los que no contienen ni A ni B pero sí C. Y por último, el paquete DEF que no contiene los libros A, B ni C. Con este recuento hemos identificado un total de 20 paquetes distintos. $C_{6,3} = 20$.

Esta forma de hacerlo es poco práctica. Para encontrar una fórmula general que nos permita calcular el número de grupos, vamos a apoyarnos en lo que ya sabemos.

Si fuera relevante el orden en que aparecen los libros en cada paquete, además de los libros que lo componen, sería un problema de variaciones y calcularíamos: $VR_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ diferentes

ABC, ABD, ABE, ABF, ACB, ACD, ACE, ACF, ADB, ADC, ADE, ADF, AEB, AEC, AED, AEF, AFB, AFC, AFD, AFE,
BAC, BAD, BAE, BAF, BCA, BCD, BCE, BCF, BDA, BDC, BDE, BDF, BEA, BEC, BED, BEF, BFA, BFC, BFD, BFE,
CAB, CAD, CAE, CAF, CBA, CBD, CBE, CBF, CDA, CDB, CDE, CDF, CEA, CEB, CED, CEF, CFA, CFB, CFD, CFE,
DAB, DAC, DAE, DAF, DBA, DBC, DBE, DBF, DCA, DCB, DCE, DCF, DEA, DEB, DEC, DEF, DFA, DFB, DFC, DFE,
EAB, EAC, EAD, EAF, EBA, EBC, EBD, EBF, ECA, ECB, ECD, ECF, EDA, EDB, EDC, EDF, EFA, EFB, EFC, EFD,
FAB, FAC, FAD, FAE, FBA, FBC, FBD, FBE, FCA, FCB, FCD, FCE, FDA, FDB, FDC , FDE, FEA, FEB, FEC, FED.

En la lista anterior hemos señalado con el mismo color algunos de los paquetes que contienen los

mismos tres libros, verás que el paquete con los libros A, B y C se repite seis veces: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Las mismas veces se repite el paquete ABD, el ACF, etc. Puedes probar a señalar cualquier otra combinación y verás que todas están repetidas exactamente seis veces. Ello es debido a que hay seis variaciones posibles con la misma composición de elementos, que se diferencian por el orden (las permutaciones de esos tres elementos que son $P_3 = 6$). Así pues, como en el recuento de variaciones, cada paquete está contado $P_3 = 6$ veces. Para saber el número de paquetes diferentes dividimos el total de variaciones entre $P_3 = 6$.

Por tanto, basta con dividir las variaciones entre las permutaciones:

$$C_{6,3} = \frac{V_{6,3}}{P_3} = \frac{120}{6} = 20$$

6.1.8. TABLA RESUMEN DE COMBINATORIA

Tipo	¿Importa el orden?	¿Se repiten elementos?	¿Fórmula?
Permutación	Sí ✅	No ❌	$P_n = n!$
Permutación con elementos repetidos	Sí ✅	Sí ✅	$P = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c! \cdot \ldots}$
Variación sin repetición	Sí ✅	No ❌	$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$
Variación con repetición	Sí ✅	Sí ✅	$VR_{m,n} = m^n$
Combinación	No ❌	No ❌	$C_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$

6.1.9. NÚMEROS COMBINATORIOS

Las combinaciones son muy útiles, por lo que su uso frecuente hace que se haya definido una expresión matemática denominada número combinatorio.

El **número combinatorio** m sobre n se designa $\binom{m}{n}$ y es igual a:

$$\binom{m}{n} = C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$$

Las **propiedades de los números combinatorios** son las que siguen:

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{m! \cdot 0!} = 1$$

$$\binom{m}{m} = \frac{m!}{(m-m)! \cdot m!} = \frac{m!}{0! \cdot m!} = 1$$

$$\binom{m}{1} = \frac{m!}{(m-1)! \cdot 1!} = m$$

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

6.1.10. BINOMIO DE NEWTON

El **Binomio de Newton** se usa para calcular las sucesivas potencias de un binomio y tiene la forma siguiente:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{1} a b^{n-1} + \binom{n}{1} b^n$$