

TEMA 8

Ecuación de la circunferencia.

Centro $C(a, b)$ y radio r .

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

- Sacar el centro y el radio de las siguiente circunferencias.

$$x^2 + (y-5)^2 = 16 \quad C(0, 5)$$

$$(x-0)^2 + (y-5)^2 = 16. \quad r = \sqrt{16} = 4.$$

- Sacar centro y radio. $(x+5)^2 + y^2 = 25$

$$C(-5, 0) \quad r = 5$$

$$25^2 \rightarrow r = \sqrt{25} = 5$$

- Centro y radio $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 441$

$$C(-3, 4)$$

$$r = \sqrt{441} = 3 \cdot 7 = 21$$

$$\begin{array}{r} * 441 \overline{) 3} \\ 147 \overline{) 3} \\ 49 \overline{) 7} \\ 7 \overline{) 7} \\ 1 \end{array}$$

* Se coge un nº de cada pareja y se multiplican, si no tiene pareja se pone el nº con $\sqrt{}$.

Ej: $24 \sqrt{24} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{6}$

$$\begin{array}{r} 24 \overline{) 2} \\ 0 \overline{) 12} \overline{) 2} \\ 0 \overline{) 6} \overline{) 2} \\ 0 \overline{) 3} \overline{) 2} \\ 0 \overline{) 1} \end{array}$$

$$(x-0)^2 + (y+7)^2 = 48$$

$$C(0, -7)$$

$$\begin{array}{r} 98 \sqrt{2} \\ 18 \overline{) 49 \sqrt{7}} \\ 0 \quad 0 \quad 7 \quad 7 \end{array}$$

$$\underline{\underline{r = 7 \cdot \sqrt{2}}}$$

Calcula la ecuación de la circunferencia de centro $C(2, -3)$

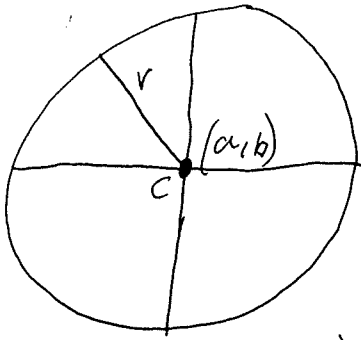
$r = 5$. $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5^2$

$$x^2 + 2^2 - 4x + y^2 + 3^2 + 6y = 25$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$$

TEMA 8 / Ecuación de la circunferencia



$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Centro C (a, b)

radio r

Calcula la ecuación de la circunferencia la reducida y la implícita que verifica que:

a) Centro C(2, 1) y radio 4

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4^2 \rightarrow \text{Ecuación reducida.}$$

$$x^2 + 4 - 4x + y^2 + 1 - 2y = 16$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 = 16$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 11 = 0 \rightarrow \text{Ecuación de la circunferencia general o implícita.}$$

b) El centro C(-2, -3) y radio 2

$$(x+2)^2 + (y+3)^2 = 2^2$$

$$x^2 + 4 + 4x + y^2 + 9 + 6y = 4$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 = 4$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$$

→ Fórmula para extraer el centro y el radio.

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

* El h: que acompaña a (x) se ÷ 2.
(y se resta al cuadrado)

$$x^2 + 2ax = x^2 + 2ax + a^2 - a^2 = (x+a)^2 - a^2$$

$$x^2 + 4x = (x+2)^2 - 2^2$$

$$x^2 - 4x = (x-2)^2 - (-2)^2 = (x-2)^2 - 4$$

$$y^2 + 6y = (y+3)^2 - 3^2 = (y+3)^2 - 9$$

• Calcular el centro y el radio de las siguientes circunferencias.

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 11 = 0$$

$$x^2 - 4x = (x-2)^2 - 2^2$$

$$y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1^2 = (y-1)^2 - 1$$

$$(x-2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 - 11 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 - 16 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$$

Centro $C(a, b)$ y radio r .

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Centro $(2, 1)$

$$\text{Radio} = \sqrt{16} = 4$$

• Hallar el Centro y el radio

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y + 2 = 0$$

$$x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 3^2$$

$$y^2 - 8y = (y - 4)^2 - 4^2$$

$$(x + 3)^2 - 9 + (y - 4)^2 - 16 + 2 = 0$$

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 23$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$\text{Centro } C(-3, 4)$$

$$\text{Radio: } \sqrt{23}$$

$$Ej: \sqrt{24}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{24} = 2\sqrt{2}\sqrt{3} \\ \sqrt{24} = \underline{2\sqrt{6}} \end{array} \quad \begin{array}{r} 24 \overline{) 2} \\ 12 \\ \hline 6 \\ 3 \\ \hline 1 \end{array}$$

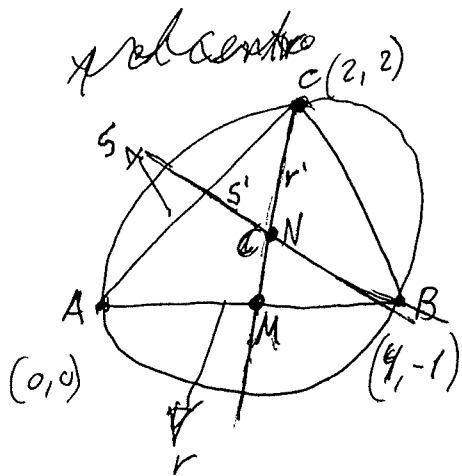
$$Ej: \sqrt{32}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{32} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \\ = \underline{4\sqrt{2}} \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \overline{) 2} \\ 16 \\ \hline 8 \\ 4 \\ \hline 2 \\ 1 \end{array}$$

El $\sqrt{4}$ se repite sale fuera

Es decir 2^2 sale 2.

- Dado el triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(4,-1)$ y $C(2,2)$
 Calcular la ecuación de la circunferencia y obtener el radio circunscrita al triángulo.



C = Centro
 Recta M
 Recta N

- Como la circunferencia pasa por los tres puntos A , B y C obtendremos su centro como la intersección de dos mediatrices de dos segmentos formados por dichos puntos

- Obtendremos la mediatriz del segmento \overline{AB} .

- Calculamos la pendiente de la recta r que pasa por A y B

$$\overline{AB} = B - A = (4, -1) - (0, 0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}; \text{pendiente de } r: m_r = \frac{y}{x} = -\frac{1}{4}$$

- Como la mediatriz r' es la recta perpendicular a r trazada por el punto medio de A y B , entonces:

$$m_r = -\frac{1}{4} \Rightarrow m_{r'} = -\frac{1}{m_r} = \frac{4}{1} = 4$$

$$r': y = 4x + h$$

- Definimos M como el punto medio de A y B .

$$M = \frac{1}{2} \cdot (A+B) = \frac{1}{2} [(0,0) + (4,-1)] = \frac{1}{2} (4,-1) = \left(2, -\frac{1}{2}\right)$$

$$M \in r' \Rightarrow -\frac{1}{2} = 4 \cdot 2 + h$$

$$-\frac{1}{2} = 8 + h$$

$$-\frac{1}{2} - 8 = h \Rightarrow h = \frac{-1 - 16}{2} = \frac{-17}{2} = h$$

$$\boxed{r': y = 4x - \frac{17}{2}}$$

- Análogamente obtenemos la mediatriz de \overline{AC} , sea S la recta que pasa por A y C . Su pendiente:

$$\overline{AC} = C - A = (2, 2) - (0, 0) = (2, 2); \text{ Pendiente de } S \quad m_S = \frac{2}{2} = 1$$

= Obtenemos la pendiente de la mediatriz S' : $m_{S'} = -\frac{1}{m_S} = -1$

$$N = \frac{1}{2}(A+C) = \frac{1}{2} \cdot [(0, 0) + (2, 2)] = \frac{1}{2}(2, 2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S': y = -x + h$$

Ecuación punto pendiente

$$y = mx + h$$

$$1 = -1 + h \rightarrow 2 = h$$

$$\boxed{S': y = -x + 2}$$

- El centro de la circunferencia lo obtenemos como la intersección de r' y S'

$$\begin{cases} y = 4x - \frac{17}{2} \\ y = -x + 2 \end{cases} \quad \begin{aligned} 4x - \frac{17}{2} &= -x + 2 \rightarrow *2 \\ 8x - 17 &= -2x + 4 \end{aligned}$$

$$10x = 21 \rightarrow x = \frac{21}{10}$$

$$y = -\frac{21}{10} + 2 = -\frac{1}{10}$$

$$C\left(\frac{21}{10}, -\frac{1}{10}\right)$$

$$\begin{array}{cc} x & y \\ \downarrow & \downarrow \\ a & b \end{array}$$

Fórmula para obtener la distancia de un punto a otro punto

$$A(x, y) \text{ y } B(x', y')$$

$$d(A, B) = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

$$\text{radio} = d\left(C\left(\frac{21}{10}, \frac{-1}{10}\right), A(0, 0)\right) = \sqrt{\left(0 - \frac{21}{10}\right)^2 + \left[0 - \left(-\frac{1}{10}\right)\right]^2} =$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{21}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{21^2}{10^2} + \frac{1^2}{10^2}} = \sqrt{\frac{441}{100} + \frac{1}{100}} = \sqrt{\frac{442}{100}} \mu$$

- Ecuación de la circunferencia:

$$\left(x - \frac{21}{10}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{10}\right)^2 = \frac{442}{100}$$

• Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0, 1)$, $B(2, 3)$ y $C(4, 1)$.

- Calculamos la pendiente de la recta r que pasa por A y B .

$$\vec{AB} = B - A = (2, 3) - (0, 1) = (2, 2); \quad m_r = \frac{2}{2} = 1 //$$

Pendiente de r

- Como la mediatriz r' es la recta perpendicular a r trazada por el punto medio de A y B , entonces:

$$m_r = -\frac{1}{m_r} \rightarrow m_{r'} = \frac{1}{m_r} = \frac{1}{-1} = -1 //$$

$$r': y = -x + h$$

- Definimos M como el punto medio de A y B

$$M = \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2}[(0, 1) + (2, 3)] = \frac{1}{2}(2, 4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$M \in r': 2 = -1 + h; \quad h = 2 + 1 = 3 //$$

$$\boxed{r': y = -x + 3}$$

- Análogamente obtenemos la mediatriz de \overline{BC} , sea s la recta que pasa por B y C . Su pendiente:

$$\vec{BC} = C - B = (4, 1) - (2, 3) = (2, -2); \quad m_s = \frac{-2}{2} = -1$$

$$m_s = -1 \rightarrow m_{s'} = -\frac{1}{m_s}; \quad m_{s'} = \frac{1}{1} = 1 //$$

- Definimos N como el punto medio de B y C .

$$N = \frac{1}{2}(B+C) = \frac{1}{2}[(2, 3) + (4, 1)] = \frac{1}{2}(6, 4) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$N \in s': 2 = 3 \cdot 1 + n; \quad n = 2 - 3 = -1 // \quad \boxed{s': y = x - 1}$$

- Calculamos el centro C de la circunferencia como la intersección de r' y s' . $r': y = -x + 3$ $s': y = x - 1$

$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = x - 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} -x + 3 &= x - 1 \\ 3 + 1 &= x + x \\ 4 &= 2x; \quad x = \frac{4}{2} = \boxed{2} \rightarrow a \\ y &= 2 - 1 = \boxed{1} \rightarrow b \end{aligned} \quad \boxed{C(2, 1)}$$

- Fórmula para obtener la distancia de un punto a otro.

$A(x, y)$ y $B(x', y')$

$$d(A, B) = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

$$\text{radio} = d(C, A)$$

$$\text{radio} = d\left(\underset{x, y}{C(2, 1)}, \underset{x', y'}{A(0, 1)}\right) = \sqrt{(0 - 2)^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 0} = \sqrt{4} = \underline{\underline{2}}$$

- Ecuación de la circunferencia

$$\boxed{(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4}$$

$$\boxed{\text{radio} = \sqrt{4} = 2}$$