

TEMA 7

Ecuaciones de la recta

Para definir una recta necesitamos un punto $P(a, b)$ y un vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$

• Ecuación paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x = a + v_1 \cdot \lambda \\ y = b + v_2 \cdot \lambda \end{cases}$$

$P \quad \vec{v}$

• Ecuación continua:

$$r \equiv \frac{x - a}{v_1} = \frac{y - b}{v_2}$$

Dadas las siguientes rectas obtener un punto y un vector de cada una de ellas.

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \end{cases} \quad \gamma \quad s \equiv \frac{x + 5}{2} = \frac{y - 7}{-3}$$

$$P_r(5, 2) \quad \gamma \quad \vec{v}_r(1, -2)$$

$$P_s(-5, 7) \quad \gamma \quad \vec{v}_s(2, -3)$$

- Dada la recta que pasa por el $P(2, -3)$ y su dirección viene dada por el vector $\vec{v} = (1, -2)$. Obtener la ecuación paramétrica continua, implícita y explícita de la recta.

Ecuación paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 - 2\lambda \end{cases}$$

Ecuación ~~paramétrica~~ continua.

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-2}$$

- Para obtener la ecuación general o implícita de la recta bastará multiplicar en cruz la ecuación continua de la recta, es decir:

$$-2 \cdot (x-2) = 1(y+3)$$

$$-2x + 4 = y + 3; \rightarrow 0 = y + 3 + 2x - 4$$

$$0 = y + 2x - 1$$

$$r \equiv y + 2x - 1 = 0 \quad \text{implícita o general}$$

$$r \equiv y = -2x + 1 \rightarrow \text{Explícita o ecuación punto pendiente.}$$

m es la pendiente de la recta

$$m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$y = -2x + n$$

$$y = -2x + 1$$

$$-3 = -2 \cdot 2 + n$$

$$1 = n$$

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Calculamos el vector de la recta a partir de los dos puntos. $P(0, 1)$ y $Q(2, -3)$
 $\overrightarrow{PQ}$ o $\overrightarrow{QP}$

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2, -3) - (0, 1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la pendiente de la recta: $m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{-4}{2} = \underline{\underline{-2}}$

$$y = mx + h$$

$$y = -2x + h$$

Cómo debe pasar por P, entonces:

$$1 = (-2) \cdot 0 + h \rightarrow \underline{\underline{h = 1}}$$

* Otra forma de obtener la ecuación punto pendiente.

$$\boxed{y = mx + h}$$

$$P(0, 1) \rightarrow 1 = m \cdot 0 + h$$

$$Q(2, -3) \rightarrow -3 = m \cdot 2 + h$$

$$\begin{cases} 1 = h \\ -3 = 2m + h \end{cases}$$

$$-3 = 2m + 1 \rightarrow -4 = 2m \rightarrow -2 = \underline{\underline{m}}$$

$$\boxed{y = -2x + 1}$$

Extremo menos origen

- Calcular la recta que pasa por los puntos $P(1,2)$ y $Q(-2,3)$.
Calculamos el vector director de la recta a partir de dichos puntos.

$$\rightarrow \vec{PQ} = Q - P = (-2, 3) - (1, 2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$V_1 \quad V_2$

$$m = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3} \text{ es la pendiente de la recta.}$$

$$y = -\frac{1}{3} \cdot x + h$$

Como la recta pasa por $P\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$, entonces:

$$2 = -\frac{1}{3} \cdot 1 + h; \rightarrow 2 + \frac{1}{3} = h \rightarrow \frac{6+1}{3} = h + \frac{7}{3} = h$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

* Otra forma $\rightarrow P\left(\begin{smallmatrix} x \\ x \end{smallmatrix}\right), Q\left(\begin{smallmatrix} x \\ x \end{smallmatrix}\right)$

$$y = mx + h$$

$$\begin{cases} 2 = m + h \\ 3 = -2m + h \end{cases} \rightarrow \text{Mejor por reducci3n}$$

$$\begin{array}{r} 2 = m + h \\ + \quad -3 = -2m + h \\ \hline -1 = 3m \end{array}$$

$$-\frac{1}{3} = m$$

$$2 = -\frac{1}{3} + h \quad h = \frac{7}{3}$$

$$2 = \frac{1}{3} = h$$

$$\text{Soluci3n} = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

- Obtener la recta que pasa por los puntos $P(\underset{x}{4}, \underset{y}{-1})$ y $Q(\underset{x}{2}, \underset{y}{-3})$

$$y = mx + n$$

$$\begin{array}{rcl} -1 = m \cdot 4 + n & -1 = 4m + n \\ -3 = m \cdot 2 + n & 3 = -2m - n \\ \hline 2 = 2m \end{array}$$

$$m = \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$$

$$-1 = 4 + n; \quad \cancel{4n} = \underline{\underline{-5}}$$

Solución:

$$\boxed{y = x - 5}$$

Calcular la ecuación de la mediatriz determinada por el segmento de extremos $P(3, 7)$ y $Q(1, -3)$.

1º) Calculémos la pendiente de la recta.

Ecuación punto pendiente $\rightarrow y = mx + n$

$$\left. \begin{array}{l} 7 = 3m + n \\ -3 = m + n \end{array} \right\} \rightarrow \text{Resolvemos por reducción}$$

$$\begin{array}{r} + \quad 7 = 3m + n \\ \quad 3 = -m - n \\ \hline 10 = 2m \rightarrow m = \frac{10}{2} = 5 \rightarrow \frac{5}{1} \end{array}$$

2º) Calculémos la pendiente perpendicular a la recta que pasa por P y Q, la cual denominaremos "m'".

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{5} \rightarrow \text{Cambiamos el numerador por denominador y cambiamos el signo.}$$

3º) La ecuación de la mediatriz $= y = m'x + n'$

$$y = -\frac{1}{5}x + n'$$

4º) Como la mediatriz debe pasar por el punto medio del segmento, el cual es M . Podemos determinar que "n'" y así finalizar la obtención de la mediatriz del segmento

$$M = \frac{P+Q}{2} = \frac{(3,7) + (1,-3)}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = \frac{4}{2}, \frac{4}{2} = (2, 2)$$

5º) Calculamos $n' \Rightarrow y = -\frac{1}{5}x + n'$

$$2 = -\frac{1}{5} \cdot 2 + n' \Rightarrow 2 = -\frac{2}{5} + n'$$

$$n' = \frac{2}{1} + \frac{2}{5} = \frac{10+2}{5} = \frac{12}{5}$$

6º) Solución = $y = -\frac{1}{5}x + \frac{12}{5}$
 $\overline{AB}$

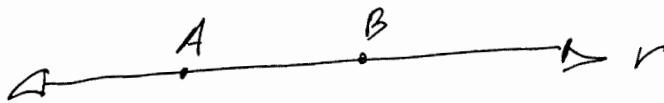
TEMA 7

Ecuación de la recta. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.
Mediatriz de un segmento.

- Calcular la mediatriz (que pasa por los puntos) del segmento cuyos extremos son $A(5, 4)$ y $B(-2, -4)$

Ecuación punto pendiente: $y = mx + n$

$m = \text{pendiente}$



Como $A(5, 4) \in r$: $4 = 5 \cdot m + n$

Como $B(-2, -4) \in r$: $-4 = -2m + n$

$$\begin{array}{r} 4 = 5m + n \\ + \quad -4 = -2m + n \\ \hline 8 = 7m \quad ; \quad m = \frac{8}{7} \text{ (pendiente)} \end{array}$$

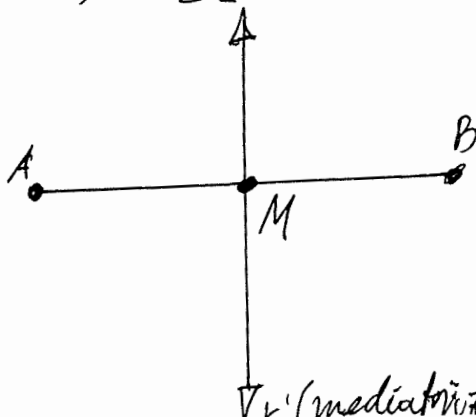
$$4 = 5 \cdot \frac{8}{7} + n;$$

$$4 - \frac{40}{7} = n; \quad \frac{28 - 40}{7} = n = -\frac{12}{7}$$

$r: y = \frac{8}{7}x - \frac{12}{7}$

- Definimos M como el punto medio de A y B .

$$M = \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2}[(5, 4) + (-2, -4)] = \frac{1}{2}(3, 0) = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$



$$r': y = m' \cdot x + n'$$

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{7}{8}$$

$m = \frac{8}{7}$
 Le damos la vuelta.

$r': y = -\frac{7}{8}x + n'$

Como $M(\frac{3}{2}, 0) \in r'$, entonces: Siguiente división

$$0 = -\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{2} + h' \rightarrow 0 = -\frac{21}{16} + h' \quad h' = \frac{21}{16}$$

Solución: la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ es: $\boxed{y = -\frac{7}{8}x + \frac{21}{16}}$

• Paramétrica:

$$r' \equiv \begin{cases} x = t \cdot \lambda \\ y = -\frac{7}{8} \lambda + \frac{21}{16} \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$V_{r'} \left(1, -\frac{7}{8} \right) \text{ y } P_{r'} \left(0, \frac{21}{16} \right)$$

• Ecuación vectorial

(Punto + lambda por el vector)

$$r' \equiv \left(0, \frac{21}{16} \right) + \lambda \left(1, -\frac{7}{8} \right) \cdot 8$$

$$r' \equiv \left(0, \frac{21}{16} \right) + \lambda (8, 7)$$

• Ecuación continua

$$r': \frac{x - 0}{8} = \frac{y - \frac{21}{16}}{-7}$$

- Calcular la mediatriz del segmento definido por los puntos $A(2, -3)$ y $B(-4, 1)$

Inicialmente obtengamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B , la cual es de la forma:

$y = mx + n$ (ecuación punto pendiente). Como $A(2, -3) \in r$: $-3 = 2m + n$,

Como $B(-4, 1) \in r$: $1 = -4m + n$.

Resolvamos el sistema de ecuaciones mediante el método de reducción.

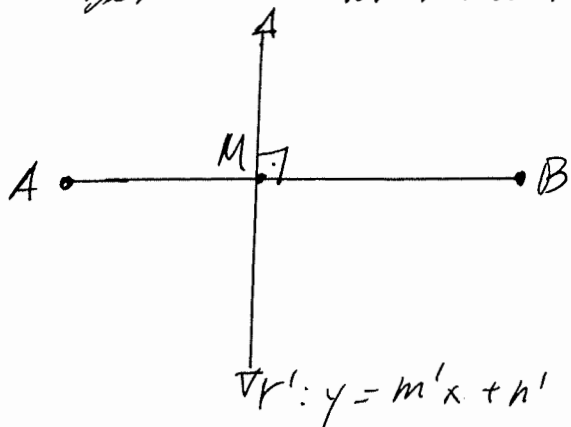
$$\begin{array}{r} -3 = 2m + n \\ + \quad -1 = 4m - n \\ \hline -4 = 6m \rightarrow -\frac{4}{6} = m \rightarrow -\frac{2}{3} = m \end{array}$$

$$r: y = -\frac{2}{3}x + n$$

Calculamos el punto medio de A y B :

$$M = \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2}[(2, -3) + (-4, 1)] = \frac{1}{2}(-2, -2) = (-1, -1)$$

Deseamos obtener la recta perpendicular a " r " que pasa por M .



$$m' = -\frac{1}{m} = \frac{3}{2}$$

$$r': y = \frac{3}{2}x + n'$$

Como $M(-1, -1) \in r'$, entonces:

$$-1 = \frac{3}{2}(-1) + n'$$

$$-1 = -\frac{3}{2} + n'$$

$$-1 + \frac{3}{2} = n' \rightarrow \frac{1}{2} = n'$$

→
Siguiente
Página

Solución: la ecuación de la mediatriz del segmento

$$\overline{AB} \text{ es: } y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

- Dado el triángulo $\triangle ABC$ cuyos vértices son $A(0, 1)$, $B(4, 3)$ y $C(-1, 4)$:

- Obtener la mediatriz del lado $\overline{AB}$ y el lado $\overline{AC}$
- Obtener el circuncentro del triángulo que viene determinado por la intersección de las tres mediatrices del triángulo.

a) Ecuación punto pendiente $y = mx + n$

Como $A(0, 1) \in r$: $1 = m \cdot 0 + n \rightarrow n = 1$

Como $B(4, 3) \in r$: $3 = m \cdot 4 + n \rightarrow 3 = 4m + 1$

$$2 = 4m; m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{2}{1} = -2$$

Como $A(0, 1) \in s$: $1 = m \cdot 0 + n \rightarrow n = 1$

Como $C(-1, 4) \in s$: $4 = m(-1) + n \rightarrow 4 = -m + 1; m = -3$

$\triangle M = \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2}(0, 1) + (4, 3) = (2, 2)$ $m' = -\frac{1}{m} = \frac{1}{3}$

$$y = -2x + n'$$

$$2 = -2 \cdot 2 + n'$$

$$2 = -4 + n'$$

$$n' = 6$$

$$r' \equiv y = -2x + 6$$

$$s': y = \frac{1}{3}x + n'$$

$$M = \frac{1}{2}(A+C) = \frac{1}{2}[(0, 1) + (-1, 4)] = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\frac{5}{2} = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + n'$$

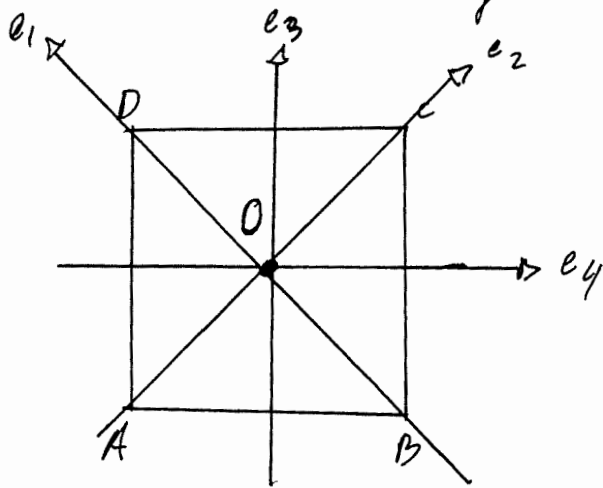
$$\frac{5}{2} = -\frac{1}{6} + n'$$

$$\frac{5}{2} + \frac{1}{6} = n'$$

$$\frac{15}{6} + \frac{1}{6} = n'$$

$$\frac{16}{6} = n' \quad \frac{8}{3} = n'$$

- Dado el cuadrado de vértices $A(1, 0)$, $B(5, 1)$, $C(4, 5)$ y $D(0, 4)$.
Obten todos los ejes de simetría de dicho cuadrado



O es el centro del cuadrado.

$$O = \frac{1}{2}(A+C) = \frac{1}{2}[(1, 0) + (4, 5)] = \frac{1}{2}(5, 5) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\vec{BD} = D - B = (0, 4) - (5, 1) = (-5, 3)$$

$$m_1 = -\frac{3}{5}$$

$$e_1: y = -\frac{3}{5}x + h_1$$

$$D(0, 4) \in e_1: 4 = -\frac{3}{5} \cdot 0 + h_1 \rightarrow 4 = h_1$$

$$e_1 \perp e_2, m_2 = \frac{1}{m_1} = \frac{5}{3}$$

$$e_2: y = \frac{5}{3}x + h_2$$

$$A(1, 0) \in e_2; 0 = \frac{5}{3} \cdot 1 + h_2 \rightarrow -\frac{5}{3} = h_2$$

$$e_2: y = \frac{5}{3}x - \frac{5}{3}$$

$$\vec{AB} = B - A = (5, 1) - (1, 0) = (4, 1) \rightarrow m_4 = \frac{y}{x} = \frac{1}{4}$$

$$O\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) \in e_4: \frac{5}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} + h_4$$

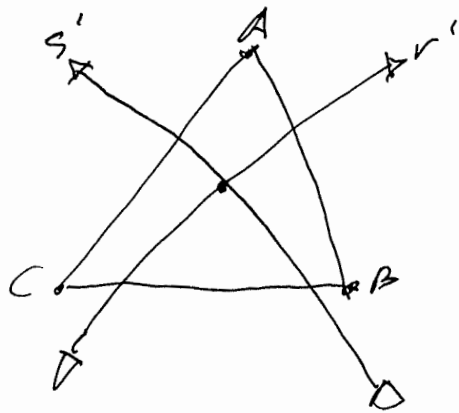
$$\frac{5}{2} = \frac{5}{8} + h_4$$

$$\frac{5}{2} - \frac{5}{8} = h_4$$

$$\frac{20}{8} - \frac{5}{8} = h_4 \rightarrow h_4 = \frac{15}{8}$$

$$e_4: y = \frac{1}{4}x + \frac{15}{8}$$

b) Llamamos O al Circuncentro, que se obtiene como intersección de r' y s'



$O = r' \cap s'$, es decir:

$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \end{cases}$$

$$-2x + 6 = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \quad \times(3)$$

$$-6x + 18 = x + 8$$

$$18 - 8 = x + 6x$$

$$10 = 7x; \quad x = \frac{10}{7}$$

$$y = -2 \cdot \frac{10}{7} + 6 = \frac{-20}{7} + 6 = \frac{22}{7}$$

Circuncentro
+

$$O\left(\frac{10}{7}, \frac{22}{7}\right)$$

$$e_4 \perp e_3; \quad m_3 = -\frac{1}{m_4}$$

$$m_4 = \frac{1}{4}$$

$$m_3 = -\frac{1}{m_4} = -\frac{4}{1} = -4$$

$$e_3: y = -4x + h_3$$

$$Q\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{9}\right) \in e_3: \frac{5}{2} = -4 \cdot \frac{5}{9} + h_3$$

$$\frac{5}{2} = \frac{-20}{2} + h_3$$

$$\frac{20}{2} + \frac{5}{9} = h_3; \quad h_3 = \frac{25}{2}$$

$$e_3: y = -4x + \frac{25}{2}$$