TEMA 6 TRIGONOMETRÍA

1. **MEDICIÓN DE ÁNGULOS.** Para medir ángulos se utilizan las siguientes unidades:

1.1 Grado sexagesimal (°) :

Si dividimos la circunferencia en 360 partes congruentes, el ángulo central correspondiente a una de esas partes es un ángulo de un grado (1°) sexagesimal.

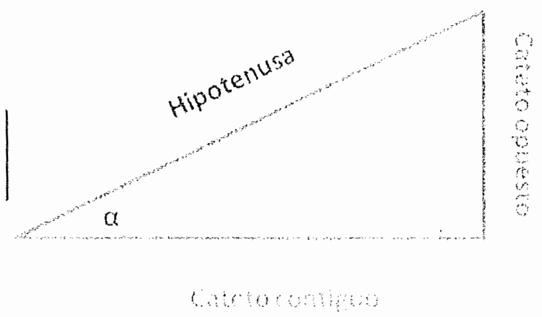
Un grado tiene 60 minutos(') y un minuto tiene 60 segundos('').

1.2 Radián(rad):

Es la medida de un ángulo cuyo arco mide un radio. Como la longitud de la circunferencia es de $2\pi(radio)$, podemos obtener la equivalencia de que 360° equivale a $2\pi\ radianes$.

grados	360	180	90	60	45
Radianes	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$

2. **TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.**



$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

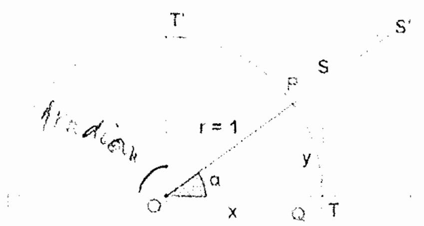
$$\cos \alpha = \frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}}$$

3. **CIRCUNFERENCIA UNIDAD:**

Se llama circunferencia goniométrica a aquella que tiene su centro en el origen de coordenadas y su radio la unidad. En la circunferencia goniométrica los ejes de coordenadas delimitan cuatro cuadrantes que se enumeran en sentido de contrario a las agujas delo reloj.

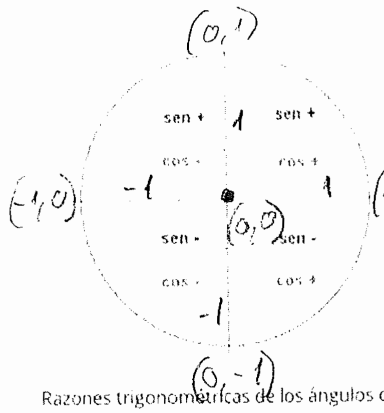
El seno es la ordenada y el coseno la abcisas.



$$\text{sen}\ \alpha = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{r} = PQ$$

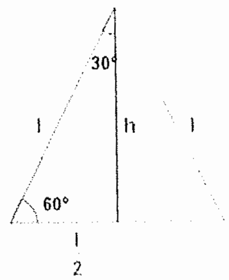
$$\cos \alpha = \frac{OQ}{OP} = OQ$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{PQ}{OQ} = \frac{ST}{OT} = \frac{ST}{r} = ST$$



α :	0°	90°	180°	270°
sen	0	1	0	−1
cos	1	0	−1	0
tg	0	$\to \infty$	0	$\to -\infty$

Razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°

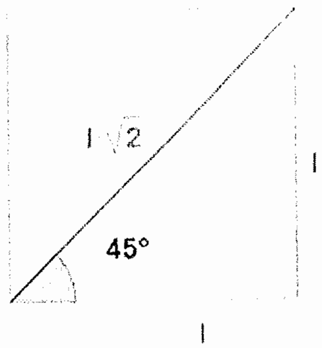


$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2} \qquad \text{sen } 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{tg } 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Razones trigonométricas del ángulo de 45°



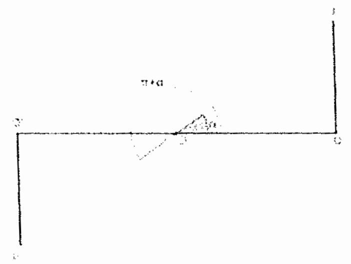
$$\text{sen } 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{tg } 45^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

Radianes: $\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$

Razones trigonométricas de ángulos notables

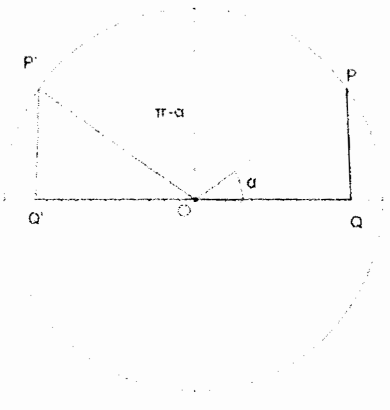
α	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\to\infty$	0	$\to-\infty$

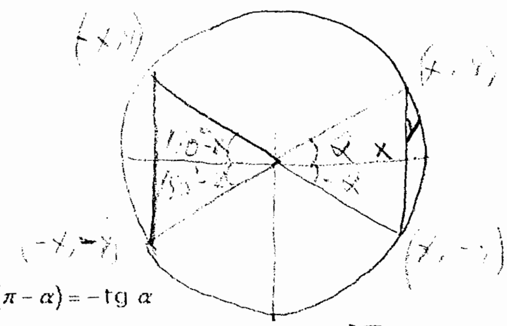
Angulos que se diferencian en 180º



$sen\ (\pi+\alpha) = -sen\ \alpha\ \cos\ (\pi+\alpha) = -\cos\ \alpha\ \text{tg}\ (\pi+\alpha) = \text{tg}\ \alpha$

Angulos suplementarios

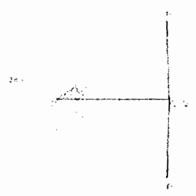




$sen\ (\pi-\alpha) = sen\ \alpha\ \cos\ (\pi-\alpha) = -\cos\ \alpha\ \text{tg}\ (\pi-\alpha) = -\text{tg}\ \alpha$

$\cos(30^{o}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Angulos opuestos



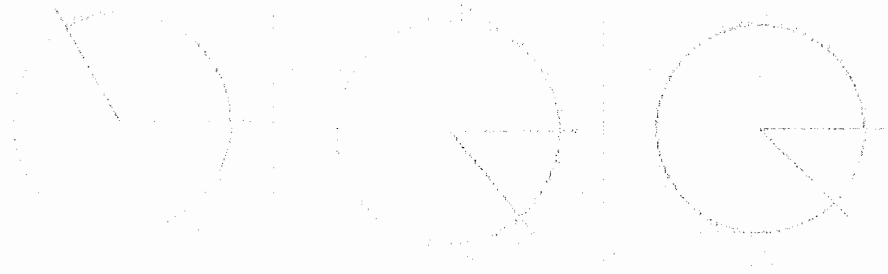
$sen\ (2\pi-\alpha) = -sen\ \alpha \quad \cos\ (2\pi-\alpha) = \cos\ \alpha \quad tg\ (2\pi-\alpha) = -tg\ \alpha$

Angulos negativos

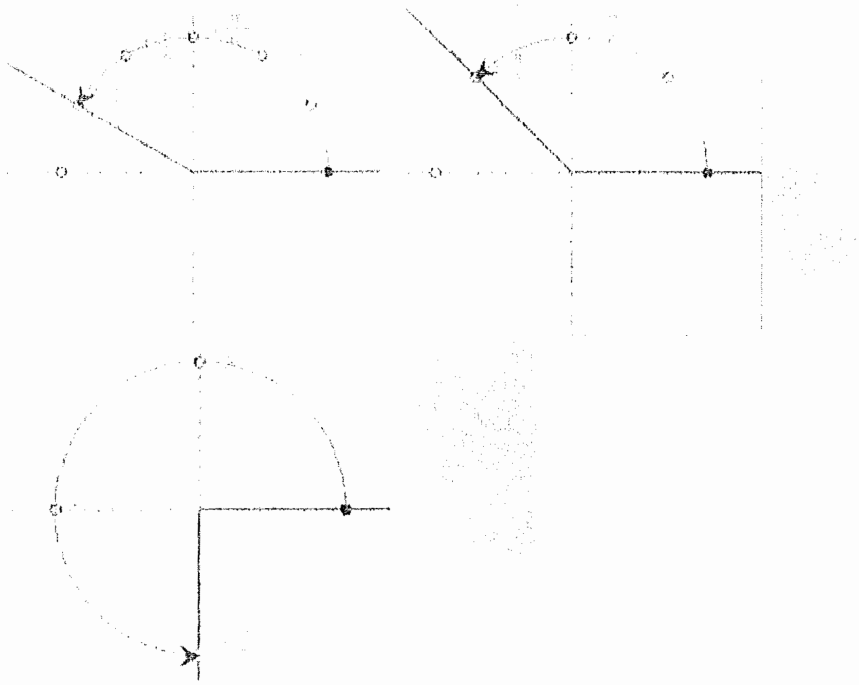
$sen\ (-\alpha) = -sen\ \alpha \quad \cos\ (-\alpha) = \cos\ \alpha \quad tg\ (-\alpha) = -tg\ \alpha$

Ejercicios:

1. Dibuja en la circunferencia goniométrica los ángulos de 120º, -50º y 315º.



2. Dibuja en la circunferencia goniométrica los ángulos de $\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}$, y $\frac{3\pi}{2}$.



3. Pasa a radianes:

a) $150^{\circ} = \frac{150 \cdot \pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$ rad

b) $210^{\circ} = \frac{210 \cdot \pi}{180} = \frac{7\pi}{6}$ rad

c) $270^{\circ} = \frac{270 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{2}$ rad

d) $60^{\circ} = \frac{60 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ rad

4. Pasa a grados:

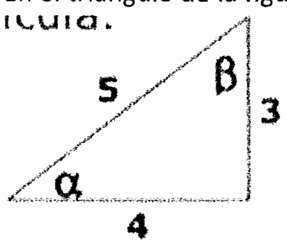
a) $\frac{11\pi}{6}$ rad $= \frac{11\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 330^{\circ}$

b) $\frac{\pi}{4}$ rad $= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 45^{\circ}$

c) $\frac{5\pi}{4}$ rad $= \frac{5\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 225^{\circ}$

d) $\frac{2\pi}{3}$ rad $= \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = 120^{\circ}$

5. En el triángulo de la figura calcula:



a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$

b) $\cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$

c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$

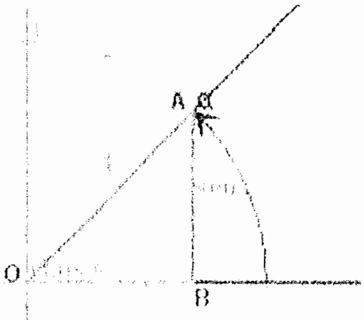
d) $\operatorname{sen}\beta = \frac{4}{5} = 0{,}8$

e) $\cos\beta = \frac{3}{5} = 0{,}6$

f) $\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3} = 1{,}\hat{3}$

4. RELACIONES FUNDAMENTALES.

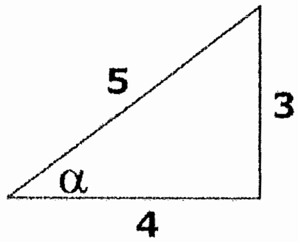
Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo OBA de la figura obtenemos:.



$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Ejercicios:

1. Comprueba en el ángulo alfa del triángulo de la figura se cumple la relación fundamental.



$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

2. Calcula el coseno y la tangente del ángulo alfa tal que $sen(\alpha) = 0,3$.

$$\cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - 0,3^2 = 1 - 0,09 = 0,81 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{0,81} = 0,9$$

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0,3}{0,9} = \frac{1}{3}$$

3. Comprueba que se cumple la relación: $1 + tg^2\alpha = \sec^2\alpha$

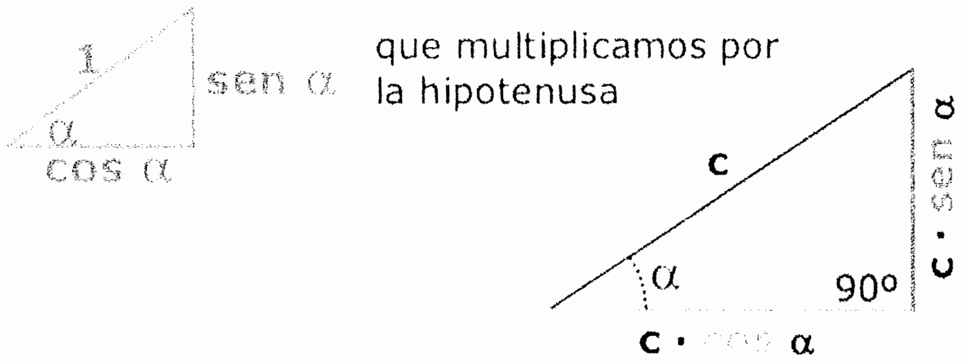
5. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo rectángulo es calcular los datos desconocidos(incógnitas), lados o ángulos, a partir de los datos conocidos(hipótesis del problema.

Veamos las casos que se pueden presentar:

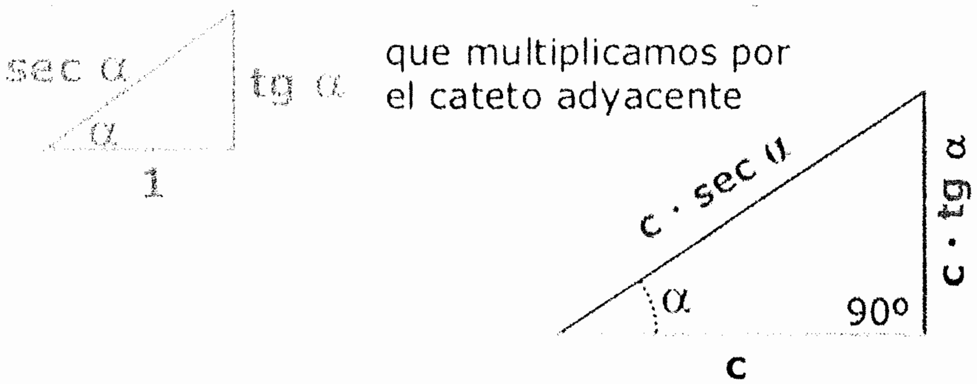
a) **CONOCIDOS UN ÁNGULO Y LA HIPOTENUSA.**

Para hallar los catetos de un triángulo rectángulo de que se conocen las medidas de la hipotenusa y de un ángulo agudo, pensaremos en el triángulo:



b) **CONOCIDOS UN ÁNGULO Y UN CATETO.**

Para hallar la hipotenusa y el otro cateto, consideraremos el siguiente triángulo:



c) **CONOCIDOS DOS LADOS.**

Para hallar el otro lado se aplicara el Teorema de Pitágoras, después hallaremos un ángulo agudo utilizando la relación de fundamental:

$tg(\alpha)=\dfrac{c.opuesto}{c.contiguo}$, obtenemos el valor de el ángulo tomando arcos en ambos lados de las igualdades, es decir: $\alpha = arctg(\dfrac{c.opuesto}{c.contiguo})$. El otro ángulo agudo se obtendrá como el complementario de alfa, decir, $\beta = 90° - \alpha$

Ejemplos:

$tg(\alpha)=1$, entonces el valor de $\alpha = arctg(\sqrt{3}) = 60°$, $\beta = 90° - 45°$

$tg(\alpha)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, entonces el valor de $\alpha = arctg(\sqrt{3}) = 60°$, $\beta = 90° - 30° = 60°$

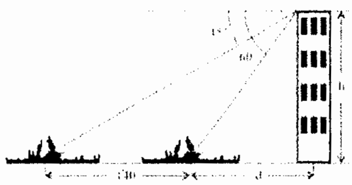
$tg(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{3}$, entonces el valor de $\alpha = arctg(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 30°$, $\beta = 90° - 60° = 30°$

EJERCICIOS DE RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS:

1. De un triángulo rectángulo ABC, se conocen a= 6 m y $\widehat{B}=60°$.
2. De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b= 6 $\sqrt{3}$ m y $\widehat{B}=60°$.
3. De un triángulo rectángulo ABC, se conocen c= 6 m y $\widehat{B}=60°$.
4. De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b= 6 $\sqrt{3}$ m y c= 6 m.
5. De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b= 6 $\sqrt{3}$ m y a=12 m.
6. Un árbol de 5 $\sqrt{3}$ m de alto proyecta una sombra 5 m. Encontrar el ángulo de elevación del sol en ese momento.
7. Un árbol de 5 m de alto proyecta una sombra 5 $\sqrt{3}$ m. Encontrar el ángulo de elevación del sol en ese momento.
8. Un dirigible está volando a 800 m de altura, distingue un pueblo con un ángulo de $30°$. ¿ A qué distancia del pueblo se halla?
9. Calcula la altura de un árbol, sabiendo que desde un punto del terreno se observa su copa bajo un ángulo de $30°$ y si nos acercamos 10 m, bajo un ángulo de $60°$.
10. En un triángulo rectángulo se sabe que la hipotenusa es 8 cm y uno de sus ángulos agudos mide $30°$. Calcula los dos catetos y el ángulo que falta.
11.

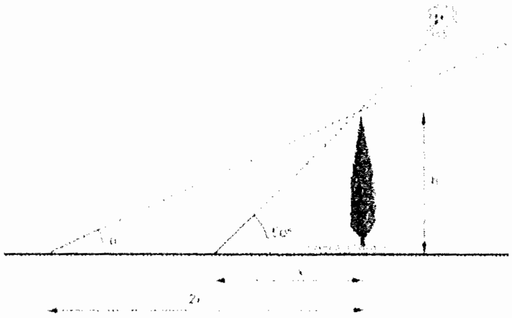
nota: $sen(42°)=0{,}67$.

12. Un tobogán tienen una altura máxima de 3 m y una longitud de 6 m. ¿Cuál es su inclinación?
13. Subimos con una bicicleta un puerto de montaña cuya ladera permite que el trazado de la carretera sea recto. Si la pendiente de la carretera es del 30 %, ¿ a qué altura nos encontramos cuando hemos recorrido 6 km?
14. Desde dos ciudades A y B que distan 80 km se observa un avión. Las visuales desde el avión de A y B forman ángulos de $30°$ y $60°$con la horizontal, respectivamente. ¿A qué altura se encuentra el avión?¿A qué distancia se encuentra de cada ciudad?
15. El ángulo bajo el cual se ve un barco desde un rascacielos mide $45°$.Cuando el barco ha recorrido 140 m dicho ángulo es de $60°$. Calcula la altura del rascacielos sobre el nivel del mar y la distancia del barco a la vertical del rascacielos en el momento de la segunda observación.



16. Calcula la longitud del puente que se quiere construir entre los puntos A y B, para lo cual se sabe que los ángulos ABO y AOB miden $30°$y $45°$, respectivamente. Y la entre A y O medida en línea recta es de 120 m.

17. Un árbol tiene determinada sombra cuando el sol se observa bajo un ángulo de elevación de $50°$. ¿Bajo que ángulo proyectará una sombra el doble de la anterior?

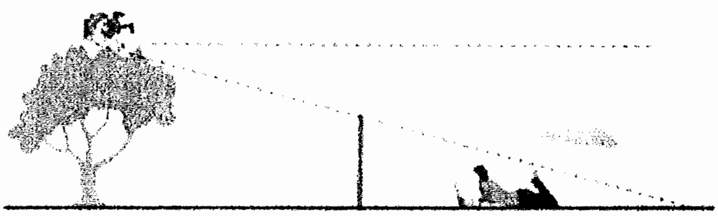


nota: $\tan(50°) \approx 1,2$

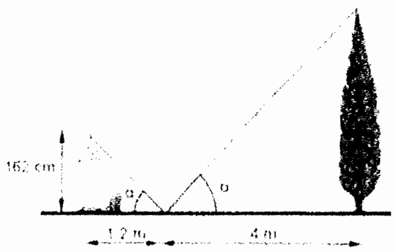
18. Un paparazzi pretende fotografiar a una actriz que se encuentra trabajando en el jardín de su casa, y para ello se sube a un árbol de 4 m de altura. Si la distancia desde a la tapia del jardín es $2\sqrt{3}$ y la altura de la tapia es de 2 m, calcular:

a) ¿Bajo que ángulo observará la propiedad del actor?

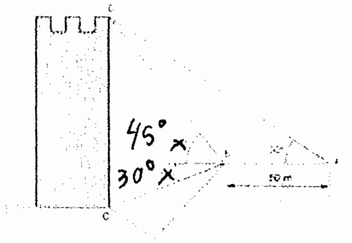
b) ¿Cuál será la máxima separación del muro a la que podrá tumbarse la actriz si no desea ver turbada su intimidad?



19. Para Calcular la altura de un árbol, Antonio ve la copa reflejada en un charco y toma las medidas que indica el dibujo. ¿Cuál es la altura del árbol?



20. Halla la altura de la torre CD de pie inaccesible y más bajo que el punto de observación, con los datos de la figura.



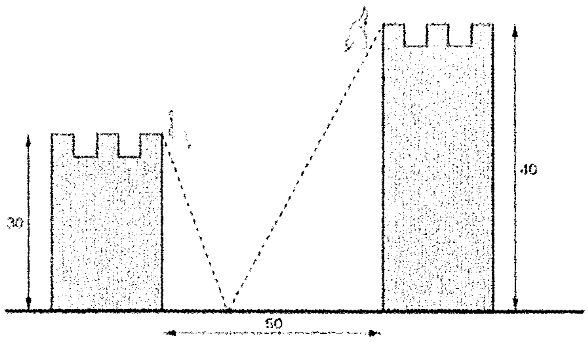
21. Un poste de 6 m de altura es alcanzado por un rayo partiéndolo a una altura "h" del suelo. La parte superior se desploma quedando unida a la parte inferior formando un ángulo de $60°$ con ella. ¿Cuánto mide la parte rota más larga del poste?

1) Dos edificios distan entre sí 150 metros. Desde un punto que está entre los dos edificios, vemos que las visuales a los puntos más altos de estos forman con la horizontal ángulos de *45°* y 30°. ¿Cuál es la altura de los edificios, si sabemos que los dos miden lo mismo?

2) Calcula el área de un rombo cuyo lado mide 6 cm. y uno de sus ángulos 150°.

3) Una estatua de 2,5 m está colocada sobre un pedestal. Desde un punto del suelo se ve el pedestal bajo un ángulo de ~~15°~~ 30° y la estatua bajo un ángulo de ~~40°~~ 45°. Calcula la altura del pedestal.

4) Dos torres, una de 30 pasos y otra de 40 pasos están separadas 50 pasos. Entre las dos torres se encuentra una fuente hacia la que descienden dos pájaros que están en las almenas de las torres. Yendo a igual velocidad llegan al mismo tiempo. ¿A qué distancia de las torres se encuentra la fuente?



~~5)~~ Dibuja un triángulo rectángulo cualquiera y construye sobre sus lados un polígono regular cualquiera. ¿Se verifica el teorema de Pitágoras? Demuéstralo con un ejemplo y haz los cálculos.

6) Desde una llanura hay que levantar la vista 20° para dirigirla hacia la bandera en lo alto de la torre de un castillo. Si avanzamos en línea recta 200 m, tenemos que levantar la vista 30°. ¿A qué altura está la bandera?

7) Desde un chiringuito en una playa se observa un barco en altamar y un faro en la costa bajo un ángulo de 60°. El faro está a 500 m. del chiringuito y también se observa desde allí el barco. El ángulo bajo el cuál se observan el barco y el chiringuito es de ~~30°~~ 45°. ¿A qué distancia está el barco del faro?

8) Se desean construir unas gradas para una piscina olímpica. Las gradas deben estar inclinadas 45° y tener una longitud (desde la primera fila hasta la última, allá en lo alto) de 50 m. Como no hay terreno suficiente se ha pensado en colocar las últimas vigas (las que soportarán la última fila) inclinadas "hacia dentro" en vez de verticales, pero vigas de las características adecuadas para tan especial disposición sólo las hay de 55 m.
a) ¿A qué altura quedará la última fila?
b) ¿Cuánto se "mete hacia dentro" el pie de la última viga?
c) ¿Qué inclinación respecto a la vertical tendrá esa viga?

9) Un globo está sujeto al suelo mediante un cable de 100 m de longitud. El viento es tan intenso que el cable, tenso, se desvía 15° de la vertical. Desde un punto algo alejado del de sujeción hay que levantar la vista 60° desde la horizontal para dirigir la mirada al globo.

a) ¿Qué distancia hay en vertical del globo al suelo?
b) ¿Qué distancia hay desde el punto algo alejado hasta el globo?
c) ¿Qué distancia hay entre el punto anterior y el de sujeción?

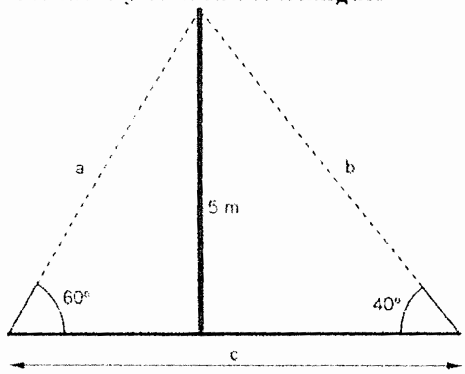
10) Las tangentes a una circunferencia de centro O, trazadas desde un punto exterior P, forman un ángulo de 50°. Halla la distancia PO sabiendo que el radio de la circunferencia es 12,4 cm.

11) En una ruta de montaña una señal indica una altitud de 785 m. Tres kilómetros más adelante (suponemos que la carretera es recta), la altitud es de 1065 m. Halla la pendiente media de esa ruta y el ángulo que forma con la horizontal.

12) Desde la orilla de un río, observamos la copa de un árbol situado en la otra orilla, bajo un ángulo de 60°. Si nos retiramos 10 m. de la orilla, el ángulo de observación es de 45°. Calcular la altura del árbol y la anchura del río.

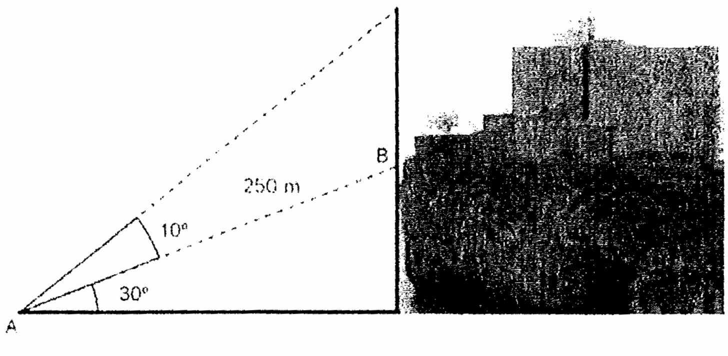
13) Calcula los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 12 cm y 8 cm. ¿Cuánto mide el lado del rombo?

14) Un mástil de 5 m se ha sujetado al suelo con un cable como muestra la figura. Halla el valor de "c", la longitud del cable y el área del triángulo



15) En un triángulo rectángulo uno de los catetos mide el doble que el otro.
a) Llama x al cateto menor y expresa en función de x el otro cateto y la hipotenusa.
b) Halla las razones trigonométricas del ángulo menor.
c) ¿Cuánto miden los ángulos de ese triángulo?

16) Para calcular la altura de un castillo hemos medido los ángulos que se indican en la figura. Sabemos que hay un funicular para ir de A a B cuya longitud es de 250 m. Halla la altura del castillo.



SOLUCIONES

6) Un árbol de $5\sqrt{3}\,\mathrm{m}$ proyecta sombra de $5\,\mathrm{m}$.

Ángulo de elevación θ: $\tan\theta = \dfrac{\text{altura}}{\text{sombra}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\theta = 60^\circ}$.

---

7) Un árbol de $5\,\mathrm{m}$ proyecta sombra de $5\sqrt{3}\,\mathrm{m}$.

$\tan\theta = \dfrac{5}{5\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\theta = 30^\circ}$.

---

8) Dirigible a $800\,\mathrm{m}$ observa un pueblo con ángulo de depresión 30°.

Distancia horizontal x: $\tan 30^\circ = \dfrac{800}{x} \Rightarrow x = \dfrac{800}{\tan 30^\circ} = 800\sqrt{3} \approx \boxed{1\,386\,\mathrm{m}}$.

9) Desde un punto a distancia d del árbol se ve la copa con 30°; al acercarnos $10\,\mathrm{m}$, con 60°.

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{d} \Rightarrow h = \frac{d}{\sqrt{3}}, \qquad \tan 60^\circ = \frac{h}{d-10} \Rightarrow h = \sqrt{3}\,(d-10)$$

Igualando: $\dfrac{d}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}(d-10) \Rightarrow d = 15$ y $h = \dfrac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3} \approx \boxed{8.66\,\mathrm{m}}$.

---

10) Triángulo rectángulo con $c = 8\,\mathrm{cm}$ e $\alpha = 30^\circ$.

Cateto opuesto a 30°: $a = 8\sin 30^\circ = 4$.

Cateto adyacente: $b = 8\cos 30^\circ = 4\sqrt{3} \approx 6.93$.

Ángulo que falta: $\boxed{60^\circ}$.

Respuesta: $\boxed{a = 4\,\mathrm{cm},\ b = 4\sqrt{3}\,\mathrm{cm},\ \gamma = 60^\circ}$.

---

11) *(No se ve en la página; salto al 12.)*

12) Tobogán: altura $3\,\mathrm{m}$, longitud $6\,\mathrm{m}$ (hipotenusa).

$\sin\theta = \dfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\theta = 30^\circ}$.

---

13) Pendiente del $30\% \Rightarrow \tan\theta = 0.3$. Recorrido por la carretera $L = 6\,\mathrm{km}$ (a lo largo de la rampa).

Altura ganada $h = L\sin\theta = L\,\dfrac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = 6\,\dfrac{0.3}{\sqrt{1+0.3^2}} \approx 6\cdot 0.2873 \approx \boxed{1.72\,\mathrm{km}}$ $(1\,724\,\mathrm{m})$.

14) Dos ciudades A, B separadas $80\,\mathrm{km}$. Ángulos de elevación: 30° (en A) y 60° (en B).
Sea x la distancia horizontal desde A a la vertical del avión y h su altura.

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow h = \frac{x}{\sqrt{3}}, \qquad \tan 60^\circ = \frac{h}{80-x} \Rightarrow h = \sqrt{3}\,(80-x).$$

Igualando: $\frac{x}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}(80-x) \Rightarrow x = 60\ \mathrm{km}.$

Altura: $h = \frac{60}{\sqrt{3}} \approx \boxed{34.6\ \mathrm{km}}$.

Distancias horizontales a cada ciudad: $A \to P: \boxed{60\,\mathrm{km}}, \quad B \to P: \boxed{20\,\mathrm{km}}$.

(Distancias en línea de visión: $AP = \frac{h}{\sin 30^\circ} \approx 69.3\,\mathrm{km}, \ BP = \frac{h}{\sin 60^\circ} \approx 40.0\,\mathrm{km}$.)

15) Desde un rascacielos se observa un barco con 45° y, tras acercarse $140\,\mathrm{m}$, con 60°.
Sea x la distancia horizontal inicial y h la altura del rascacielos.

$\tan 45^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x.$

$\tan 60^\circ = \frac{h}{x-140} = \sqrt{3} \Rightarrow h = \sqrt{3}(x-140).$

Sustituyendo $h = x$: $\sqrt{3}(x-140) = x \Rightarrow x = \frac{140\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = 70(3+\sqrt{3}) \approx 331.2.$

$$\boxed{h \approx 331.2\ \mathrm{m}}, \qquad \text{distancia en la 2ª observación } (x-140) \approx \boxed{191.2\ \mathrm{m}}.$$

---

16) Triángulo ABO con $\angle AOB = 45^\circ, \ \angle ABO = 30^\circ$ y $AO = 120\,\mathrm{m}$.
$\angle BAO = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ$. Por seno:

$$\frac{AO}{\sin 30^\circ} = \frac{AB}{\sin 45^\circ} \Rightarrow AB = 120\,\frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 120\,\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 120\sqrt{2} \approx \boxed{169.7\ \mathrm{m}}.$$

17) Un árbol tiene cierta sombra cuando el ángulo de elevación del sol es 50°. ¿Con qué ángulo proyectará **el doble** de sombra?

Sea h la altura del árbol y s_1 la sombra inicial.

$\tan 50^\circ = \dfrac{h}{s_1} \approx 1.2 \Rightarrow h = 1.2\, s_1.$

Si la nueva sombra es $s_2 = 2s_1$, entonces

$$\tan\theta = \frac{h}{s_2} = \frac{1.2\, s_1}{2s_1} = 0.6 \Rightarrow \boxed{\theta = \arctan(0.6) \approx 31^\circ}.$$

18) (Paparazzi y tapia). Se sube a un **árbol de 4 m** situado a $2\sqrt{3}$ m de la tapia (de **2 m** de alto).

a) ¿Bajo qué ángulo observa el interior?

b) ¿A qué distancia máxima del muro podría tumbarse la actriz para no ser vista?

Del ojo (4 m) a la **arista** de la tapia (2 m) hay diferencia $4 - 2 = 2$ m en $2\sqrt{3}$ m horizontales.

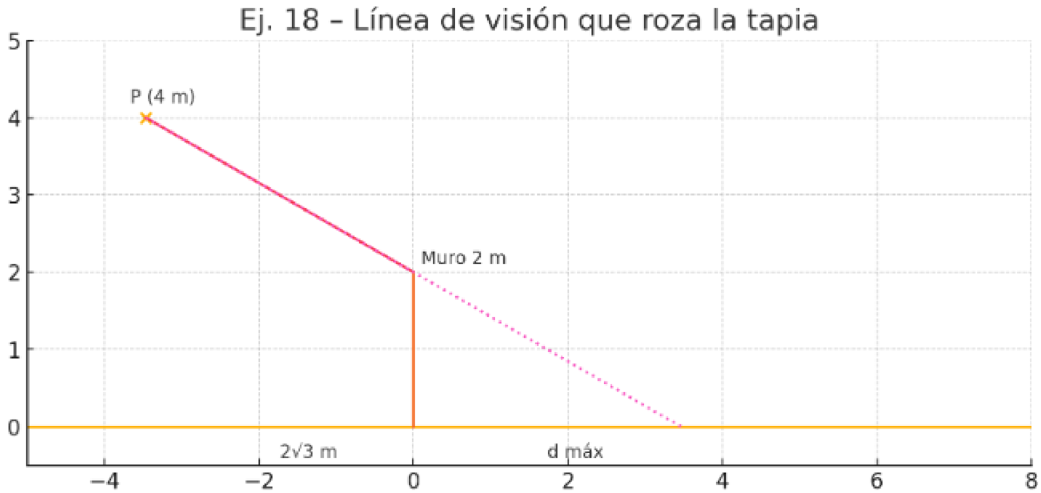
$$\tan\alpha = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\alpha = 30^\circ}.$$

La recta de visión que **roza** la tapia (30°) corta el suelo cuando la caída vertical alcanza 4 m:

$$4 = (x)\tan 30^\circ \Rightarrow x = 4\sqrt{3}.$$

Como hasta el muro hay $2\sqrt{3}$, la **distancia más allá del muro** es

$$\boxed{d_{\max} = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\ \mathrm{m}\ (\approx 3.46\ \mathrm{m})}.$$



19) (Reflexión en un charco). Altura de los ojos $= 1{,}62$ m; distancias al charco: 1,2 m (observador) y 4 m (árbol).
Por semejanza (imagen especular):

$$\frac{H_{\text{árbol}}}{1.62} = \frac{4}{1.2} = \frac{10}{3} \Rightarrow \boxed{H_{\text{árbol}} = 1.62 \cdot \frac{10}{3} = 5.4 \text{ m}}.$$

---

20) (Dos observaciones a 30° y 45°, separación **50 m**; véase la figura).
Sea x la distancia horizontal desde el **punto cercano** al pie de la torre y H su altura.

$$\text{Desde cerca: } \tan 45^\circ = \frac{H}{x} \Rightarrow H = x.$$

$$\text{Desde lejos: } \tan 30^\circ = \frac{H}{x+50} \Rightarrow H = \frac{x+50}{\sqrt{3}}.$$

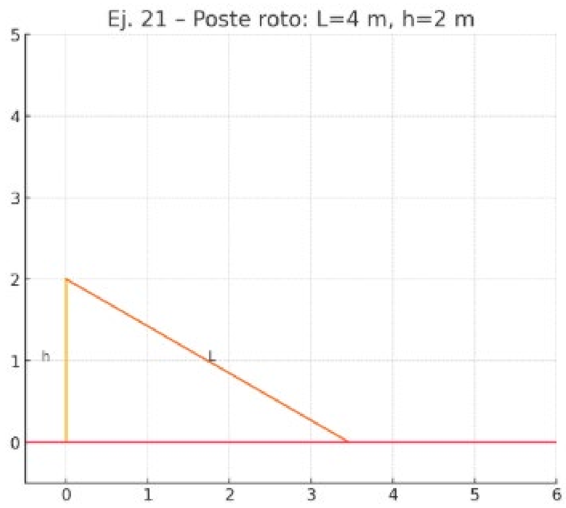
Igualando H: $x = \dfrac{x+50}{\sqrt{3}} \Rightarrow x(\sqrt{3}-1) = 50 \Rightarrow x = 25(\sqrt{3}+1) \approx 68.3 \text{ m}.$

$$\boxed{H = x \approx 68.3 \text{ m}}.$$

21) (Poste de 6 m roto a altura h; la parte superior forma **60°** con la inferior –vertical–).
La parte superior hace 30° con el suelo. Si su longitud es L, al apoyar en el suelo:

$$\underbrace{h}_{\text{caída vertical}} = L \sin 30^\circ = \frac{L}{2} \quad \text{y} \quad h + L = 6.$$

Luego $L = 2h$ y $3h = 6 \Rightarrow h = 2$ m, $L = 4$ m.
La parte rota más larga mide $\boxed{4 \text{ m}}$.



1) Dos edificios a 150 m; desde un punto intermedio se ven sus cimas con 55° y 30° y **tienen la misma altura** H.

$$\tan 55^\circ = \frac{H}{d_1}, \qquad \tan 30^\circ = \frac{H}{d_2}, \qquad d_1 + d_2 = 150.$$

$$H\left(\frac{1}{\tan 55^\circ} + \frac{1}{\tan 30^\circ}\right) = 150 \Rightarrow \boxed{H \approx 61.67 \text{ m}}.$$

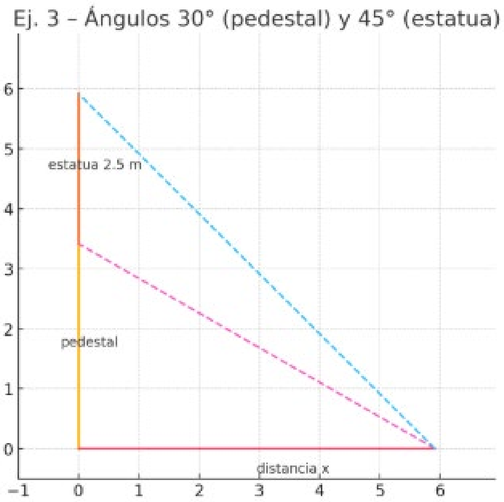
2) Rombo de lado 6 cm y ángulo 150°.

Área de paralelogramo: $A = a\,b\sin\theta \Rightarrow A = 6^2\sin 150^\circ = 36\cdot\frac{1}{2} = \boxed{18 \text{ cm}^2}$.

3) Estatua de 2,5 m sobre pedestal de altura h. Desde un punto del suelo:

$\tan 30^\circ = h/x,\ \tan 45^\circ = (h+2.5)/x \Rightarrow x = h\sqrt{3} = h + 2.5.$

$$\boxed{h = \frac{2.5}{\sqrt{3}-1} = 1.25(\sqrt{3}+1) \approx 3.42 \text{ m}}.$$



4) Torres de 30 y 40 pasos separadas 50; la fuente F está entre ambas y las distancias desde las almenas son iguales:

$\sqrt{x^2+30^2} = \sqrt{(50-x)^2+40^2} \Rightarrow x = \boxed{32}$ (desde la torre de 30); desde la de 40: $50 - x = \boxed{18}$.

5) (Construcción con polígonos regulares en los lados de un triángulo rectángulo).

Si las figuras son **semejantes**, su área es $k\,(\text{lado})^2$.

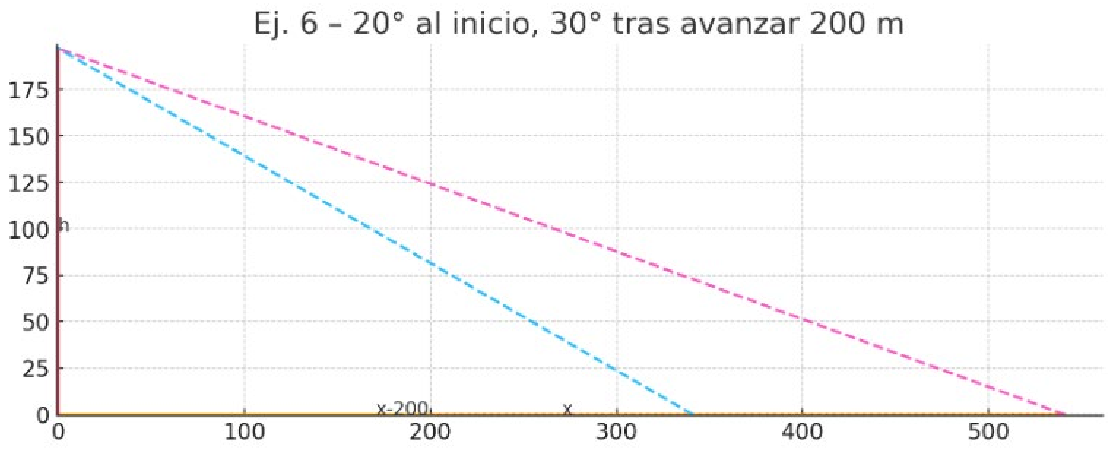
En un triángulo rectángulo $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow ka^2 + kb^2 = kc^2$: el "Pitágoras" vale para cualquier polígono regular.

Ejemplo: en un 3–4–5, áreas de triángulos equiláteros: $\frac{\sqrt{3}}{4}3^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}4^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}5^2$.

6) A una bandera se la ve con 20° y, 200 m más cerca, con 30°.

$$h = d\tan 20^\circ = (d-200)\tan 30^\circ \Rightarrow \boxed{h \approx 196.96 \text{ m}}, \quad d \approx 541.15 \text{ m}.$$

Esquema de apoyo arriba.



7) Chiringuito–Faro $= 500$ m; ángulos en el chiringuito y en el faro: 60° y 45°.

Ley de senos ($\widehat{C} = 60^\circ,\ \widehat{F} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 75^\circ$):

$$\overline{BF} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ}\,500 \approx \boxed{448.29\ \mathrm{m}}.$$

8) Gradas: inclinación 45°, longitud 50 m; viga inclinada "hacia dentro" de 55 m.

Altura final $h = 50\sin 45^\circ = \boxed{35.36\ \mathrm{m}}$.

"Se mete hacia dentro" $\Delta = \sqrt{55^2 - h^2} \approx \boxed{42.13\ \mathrm{m}}$.

Ángulo con la **vertical**: $\arccos\big(h/55\big) \approx \boxed{50^\circ}$.

9) (Globo con cable de 100 m, 15° con la vertical; desde un punto del suelo se ve con 60°).

9) Cable $= 100$ m, **15° con la vertical** $\Rightarrow$ altura $H = 100\cos 15^\circ$.

a) $\boxed{H \approx 96.59\ \mathrm{m}}$.

b) Desde el punto donde la elevación es 60°: distancia al globo

$D = \dfrac{H}{\sin 60^\circ} \approx \boxed{111.54\ \mathrm{m}}$.

c) Distancia horizontal de ese punto al pie del globo: $x = \dfrac{H}{\tan 60^\circ} \approx 55.77$ m.

Distancia desde ese punto **al anclaje** (tomando el punto al lado opuesto del globo respecto al anclaje, como en el croquis):

$$\boxed{x + 100\sin 15^\circ \approx 81.65\ \mathrm{m}}.$$

(Si el punto está entre el anclaje y la vertical del globo, sería $|x - 100\sin 15^\circ| \approx 29.91$ m.)

10) Dos tangentes desde P forman 50°. Con radio $R = 12.4$ cm:

en $\triangle OPT$, $\sin\frac{\theta}{2} = \dfrac{R}{OP} \Rightarrow OP = \dfrac{R}{\sin 25^\circ}$.

$$\boxed{OP \approx 29.34\ \mathrm{cm}}.$$

11) Señales: 785 m y 1065 m a **3 km** (recto).

Desnivel $= 280$ m.

$$\theta = \arcsin\frac{280}{3000} \approx \boxed{5.36^\circ}, \quad \text{pendiente} = \tan\theta \approx \boxed{9.37\%}.$$

12) Árbol enfrente del río: $\tan 60^\circ = \dfrac{h}{w}$, al alejarse 10 m: $\tan 45^\circ = \dfrac{h}{w+10}$.

$$w\sqrt{3} = w + 10 \Rightarrow \boxed{w = 5(\sqrt{3}+1) \approx 13.66 \text{ m}}, \quad h = w\sqrt{3} \approx \boxed{23.66 \text{ m}}.$$

13) Rombo con diagonales 12 cm y 8 cm.

Semidiagonales 6 y 4 (perpendiculares) ⇒ lado $s = \sqrt{6^2+4^2} = \boxed{2\sqrt{13} \approx 7.21 \text{ cm}}$.

Ángulo agudo $= 2\arctan\frac{4}{6} \approx \boxed{67.38^\circ}$; obtuso $\boxed{112.62^\circ}$.

14) Mástil 5 m; ángulos en la base 60° y 40°.

Proyecciones: $c = \dfrac{5}{\tan 60^\circ} + \dfrac{5}{\tan 40^\circ} \approx \boxed{8.85 \text{ m}}$.

Cables: $a = \dfrac{5}{\sin 60^\circ} \approx \boxed{5.77 \text{ m}}, \quad b = \dfrac{5}{\sin 40^\circ} \approx \boxed{7.78 \text{ m}}$.

Área $A = \dfrac{1}{2}\, c \cdot 5 \approx \boxed{22.11 \text{ m}^2}$.

15) Triángulo rectángulo con un cateto el doble del otro.

a) Si el menor es x: catetos x y $2x$, hipotenusa $\sqrt{5}\,x$.

b) Ángulo menor α: $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \ \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \ \tan\alpha = \frac{1}{2}$.

c) $\alpha = \arctan\frac{1}{2} \approx \boxed{26.57^\circ}$, $\beta = \boxed{63.43^\circ}$.

16) (Figura dada) Funicular $AB = 250$ m con 30° y la visual al **coronamiento** a 40°.

Altura hasta B: $h_B = 250\sin 30^\circ = 125$ m; distancia horizontal $x = 250\cos 30^\circ$.

Altura del castillo (sobre B):

$$H = x\tan 40^\circ - h_B \approx \boxed{56.67 \text{ m}}.$$