

INECUACIONES

1. Resuelve la inecuación $\frac{4-3x}{2} < x+3$

Sol: $x > -2/5$

2. Halla el conjunto de soluciones de las inecuaciones siguientes:

a) $2x-3 < 5$

b) $2-x > 1$

c) $-2x+8 < x-1$

d) $\frac{x-5}{2} > x+3$

Sol: a) $x < 4$; b) $x < 1$; c) $x > 3$; d) $x < -11$

3. Resuelve:

a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} > 3 - \frac{x}{6}$

b) $\frac{2x-1}{3} + \frac{x+1}{3} < 2x-2$

c) $\frac{x}{3} + \frac{x+2}{5} > x-1$

d) $\frac{x-1}{3} - \frac{x-4}{2} < \frac{x+4}{2} - 3$

e) $\frac{x+1}{3} - \frac{x-2}{5} > 1 + \frac{x-1}{15}$

f) $\frac{x-2}{5} - \frac{3x+1}{2} < \frac{x}{2} - 3x$

Sol: a) $x > 3$; b) $x > 2$; c) $x < 3$; d) $x > 4$; e) $x > 3$; f) $x < 3/4$

4. Resuelve:

a) $\frac{x}{3} - \frac{2x+5}{2} - \frac{3-2x}{6} > 0$

b) $\frac{x-1}{3} - x < \frac{3-x}{4} - 1$

c) $\frac{x}{3} + \frac{x+4}{7} - x + 1 < 0$

d) $3x - \frac{1-2x}{4} < \frac{x-1}{2} + 1$

e) $\frac{2x+5}{6} > 1 + \frac{x+2}{3}$

f) $\frac{x-1}{3} - \frac{2-x}{4} > \frac{2x-3}{2} - 1$

Sol: a) $x < -9$; b) $x > -1/5$; c) $x > 3$; d) $x < 1/4$; e) Sin solución; f) $x < 4$

5. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{x+2}{2} < 3x$

b) $\frac{x-1}{4} + 1 < \frac{x+3}{2}$

c) $-3x+7 < 2x-3$

d) $\frac{x-1}{3} > x+5$

Sol: a) $x > 2/5$; b) $x > -3$; c) $x > 2$; d) $x < -8$

6. Halla el conjunto de soluciones de la inecuación $x^2-2x-3 > 0$

Sol: $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$

7. Representa el conjunto de soluciones de las siguientes inecuaciones:

a) $x+y-4 < 0$

b) $x+2y-5 > 0$

c) $2x-y+3 < 0$

d) $3x-y > 0$

8. Resuelve:

a) $-x^2 - x + 6 > 0$ b) $x^2 + x - 20 < 0$ c) $2x^2 + 2x - 4 > 0$ d) $x^2 + 2x + 2 < 0$

Sol: a) $[-3, 2]$; b) $[-2, 1]$; c) $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$; d) $\emptyset$

9. Resuelve:

a) $x^2 - x + 2 > x + 5$ b) $x^2 - x + 5 < 2x + 5$ c) $6x - 4x^2 + x + 2 > 0$

Sol: a) $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$; b) $(0, 3)$; c) $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

10. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - x - 6 > 0$ b) $x^2 + 6x + 24 > 0$

c) $x^2 - 6x + 8 > 0$ d) $x^2 + 2x - 8 < 0$

e) $x^2 - 3x > 0$ f) $x^2 - 10 < 0$

Sol: a) $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$; b) $(-\infty, +\infty)$; c) $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$; d) $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$; e) $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$; f) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

11. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 9x + 18 < 0$ b) $x^2 - 7x + 12 < 0$

c) $x^2 - x + 5 < 0$ d) $2x^2 - 10x - 12 < 0$

e) $x^2 + x - 6 < 0$ f) $-3x^2 + 6x + 9 < 0$

Sol: a) $(3, 6)$; b) $(3, 4)$; c) Sin solución; d) $[-1, 6]$; e) $(-3, 2)$; f) $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

12. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado reduciéndolas previamente a la forma general:

a) $x(x+1) + 3x > 5x + 6$ b) $(x-1)^2 - (x+3)^2 + x^2 - 9x - 8 < 0$

c) $x(x^2 - 2) - (x+1)(x^2 - 1) > -4 - x^2$ d) $(2x-5)^2 < 1$

e) $2x(x+2) + 6 > 0$ f) $-x(x+1) + 2 < 0$

Sol: a) $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$; b) $[-1, 0]$; c) $(-\infty, 5)$; d) $[2, 3]$; e) $(-\infty, +\infty)$; f) $[-2, 1]$

13. Resuelve:

a) $\frac{x-3}{x+1} > 0$ b) $\frac{3-x}{x-2} \geq 0$ c) $\frac{x}{2-x} \geq 0$ d) $\frac{x+2}{x^2} < 0$

Sol: a) $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$; b) $(2, 3]$; c) $[0, 2)$; d) $x < -2$

14. Resuelve las siguientes inecuaciones fraccionarias:

a) $\frac{x-2}{x-1} > 0$ b) $\frac{2x-4}{x-1} > 0$ c) $\frac{x}{x+2} \geq 0$

d) $\frac{x-3}{x+3} > 0$ e) $\frac{x+1}{x-2} - 2 \geq 0$ f) $\frac{x+2}{x-1} > 1$

Sol: a) $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$; b) $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$; c) $(-\infty, -2) \cup [0, +\infty)$; d) $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$; e) $(2, 5]$; f) $(1, +\infty)$

15. Resuelve las siguientes inecuaciones:

$$a) \frac{(x+2)(x-2)}{x^2+3} > 0$$

$$b) \frac{(x+3)(2x-4)}{x^2+1} > 0$$

$$c) \frac{x^2+1}{x^2-1} > 0$$

$$d) \frac{-x^2+3x-2}{x^2+1} \geq 0$$

$$e) \frac{x^2+4x+4}{x^2-x-6} \geq 0$$

$$f) \frac{x^2-1}{x^2-4x+4} > 0$$

Sol: a) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$; b) $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$; c) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; d) $[1, 2]$; e) $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$; f) $(-\infty, -1) \cup [1, 2) \cup (2, +\infty)$

16. Resuelve las siguientes inecuaciones:

$$a) \frac{x(x+2)}{x-2} > 0$$

$$b) \frac{x^2-4}{x} \geq 0$$

$$c) \frac{1-x^2}{x^2-4} > 0$$

$$d) \frac{x^2-x-6}{x^2-3x+6} > 0$$

$$e) \frac{x(x-2)}{(x+1)(x+3)} \geq 0$$

$$f) \frac{x+2}{x-1} \geq \frac{2x-1}{x+2} - 1$$

$$g) \frac{1}{x-1} > \frac{3}{x+1}$$

Sol: a) $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$; b) $[-2, 0] \cup [2, +\infty)$; c) $(-2, 1) \cup (1, 2)$; d) $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$; e) $(-\infty, -3) \cup (-1, 0] \cup [2, +\infty)$; f) $(-2, -1/8] \cup (1, +\infty)$; g) $(-\infty, -1) \cup (1, 2)$

17. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$a) \begin{cases} \frac{x}{3} + x < 4 \\ \frac{x}{2} - \frac{x}{3} > 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{x-4}{2} + \frac{x+2}{3} \leq 2 \\ \frac{x}{3} - \frac{x}{2} \leq 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{2x-2}{5} \leq 0 \\ \frac{3x+9}{3} \geq 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x-3 < 0 \\ \frac{2x-8}{3} \geq 0 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{x}{2} \geq 1 \\ (x+1)^2 - x^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} \frac{x-3}{x} \geq \frac{2}{5} \\ \frac{x-2}{2} + \frac{x+2}{3} \leq 3 \end{cases}$$

Sol: a) $(0, 3)$; b) $[-6, 5]$; c) $[-3, 1]$; d) $\emptyset$; e) $(-\infty, -6]$; f) $(-\infty, 0)$

18. Halla el conjunto de soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a) \begin{cases} x-5 > 0 \\ x+8 > 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2-x > 0 \\ 1+x > 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x+3 > 0 \\ x-2 \leq 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x \geq 0 \\ 1+x < 0 \end{cases}$$

Sol: a) $(5, +\infty)$; b) $(-1, 2)$; c) $(-3, 2]$; d) $\emptyset$

19. Resuelve los sistemas:

$$a) \begin{cases} x+3 > 0 \\ x^2+x-2 < 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} (x+1)^2 - (x-2)(x+1) > 0 \\ \frac{x}{x-2} > 0 \end{cases}$$

Sol: a) $(-2, 1)$; b) $(-1, 0) \cup (2, +\infty)$

20. Traduce a lenguaje algebraico:

- a) El doble de un número más 3 unidades es menor que 10
- b) El cuadrado de un número es mayor que el triple de ese número menos 2.
- c) Si tuviera 10 euros más, superaría el precio que se necesita para comprar un libro, que es de 30 euros.

Sol: a) $2x+3<10$; b) $x^2>3x-2$; c) $x+10>30$

21. Una fábrica A paga a sus viajantes 1 euro por artículo vendido más una cantidad fija de 500 euros. Otra fábrica B paga 1,5 euros por artículo y 300 euros fijos. ¿Cuántos artículos debe vender el viajante de la fábrica B para ganar más dinero que el de la fábrica A?

Sol: $x>400$

22. ¿Cuáles son los números cuyo cuadrado excede al propio número en más de dos?

Sol: $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

23. Un padre y su hijo se llevan 30 años. Determina en qué período de sus vidas la edad del padre excede en más de 10 años al doble de la edad del hijo.

Sol: de 0 a 20 años.

24. ¿Cuáles son los números cuyo cuádruplo excede a su doble en más de 10?. Sol: $x>5$

SOLUCIONES

$$1) \frac{4 - 3x}{2} < x + 3$$

Multiplico por 2 (es **positivo**, no cambia el signo):

$$4 - 3x < 2x + 6$$

Paso las x a la derecha y los números a la izquierda:

$$-3x - 2x < 6 - 4 \Rightarrow -5x < 2$$

Divido por -5 (al ser negativo **se invierte** la desigualdad):

$$\boxed{x > -\frac{2}{5}}$$

Conjunto solución: $(-\frac{2}{5}, \infty)$.

2) Halla el conjunto de soluciones

$$a) 2x - 3 < 5$$

$$2x < 8 \Rightarrow \boxed{x < 4} \quad (\text{sol: } (-\infty, 4))$$

$$b) 2 - x > 1$$

$$-x > -1 \Rightarrow \boxed{x < 1} \quad (\text{al multiplicar por } -1 \text{ se invierte; sol: } (-\infty, 1))$$

$$c) -2x + 8 < x - 1$$

$$-2x - x < -1 - 8 \Rightarrow -3x < -9 \Rightarrow \boxed{x > 3} \quad (\text{sol: } (3, \infty))$$

$$d) \frac{x - 5}{2} > x + 3$$

$$x - 5 > 2x + 6 \Rightarrow -5 > x + 6 \Rightarrow -11 > x \Rightarrow \boxed{x < -11} \quad (\text{sol: } (-\infty, -11))$$

3. Resuelve (p.1)

Idea clave: en inecuaciones con fracciones conviene multiplicar por el **mcm** de los denominadores (siempre positivo) para eliminar fracciones **sin cambiar** el sentido de la desigualdad.

a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} > 3 - \frac{x}{6}$

mcm= 6: $3x + 2x > 18 - x \Rightarrow 5x > x(-1) + 18 \Rightarrow 6x > 18 \Rightarrow \boxed{x > 3}$.

b) $\frac{2x-1}{3} + \frac{x+1}{3} < 2x-2$

Sumo en el LHS: $\frac{(2x-1) + (x+1)}{3} = \frac{3x}{3} = x$.

Queda $x < 2x-2 \Rightarrow 0 < x-2 \Rightarrow \boxed{x > 2}$.

c) $\frac{x}{3} + \frac{x+2}{5} < x-1$

mcm= 15: $5x + 3(x+2) < 15x - 15 \Rightarrow 8x + 6 < 15x - 15 \Rightarrow 21 < 7x \Rightarrow \boxed{x > 3}$.

d) $\frac{x-1}{3} + \frac{x-4}{2} > \frac{x+4}{2} - 3$

mcm= 6: $2(x-1) + 3(x-4) > 3(x+4) - 18 \Rightarrow 5x - 14 > 3x - 6 \Rightarrow 2x > 8 \Rightarrow \boxed{x > 4}$.

e) $\frac{x+1}{3} - \frac{x-2}{5} > 1 + \frac{x-1}{15}$

mcm= 15: $5(x+1) - 3(x-2) > 15 + (x-1) \Rightarrow 2x + 11 > x + 14 \Rightarrow \boxed{x > 3}$.

f) $\frac{x-2}{5} - \frac{3x+1}{2} < \frac{x}{2} - 3x$

mcm= 10: $2(x-2) - 5(3x+1) < 5x - 30x \Rightarrow -13x - 9 < -25x \Rightarrow 12x < 9 \Rightarrow \boxed{x < \frac{3}{4}}$.

5. Resuelve las siguientes inecuaciones (p.1)

a) $\frac{x+2}{2} < 3x$

$$x+2 < 6x \Rightarrow 2 < 5x \Rightarrow \boxed{x > \frac{2}{5}}.$$

b) $\frac{x-1}{4} + 1 < \frac{x+3}{2}$

Multiplico por 4: $x-1+4 < 2(x+3) \Rightarrow x+3 < 2x+6 \Rightarrow -3 < x \Rightarrow \boxed{x > -3}.$

c) $-3x+7 < 2x-3$

$$10 < 5x \Rightarrow \boxed{x > 2}.$$

d) $\frac{x-1}{3} > x+5$

$$x-1 > 3x+15 \Rightarrow -16 > 2x \Rightarrow \boxed{x < -8}.$$

6. Halla el conjunto de soluciones de $x^2 - 2x - 3 > 0$ (p.1)

Factorizo: $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1).$

Producto $> 0 \Rightarrow$ ambos factores del mismo signo $\Rightarrow$

$$x < -1 \text{ o } x > 3.$$

Solución: $\boxed{(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)}.$ 

7. Representa el conjunto de soluciones (p.1)

Convertimos cada inecuación en forma " y en función de x " y dibujamos la recta frontera.

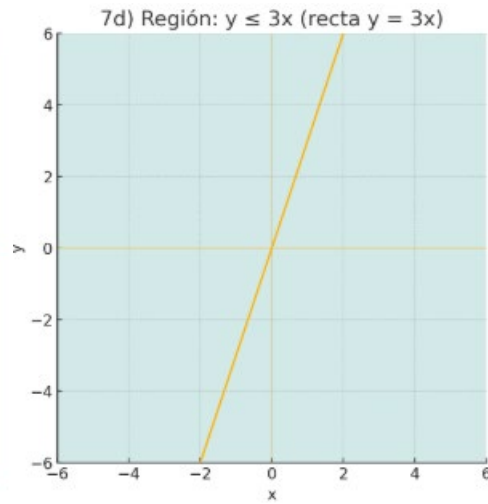
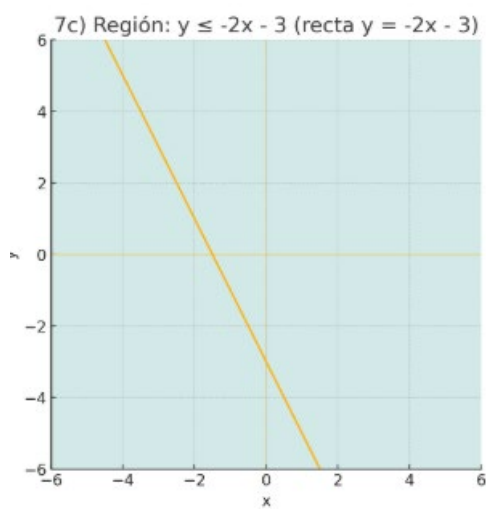
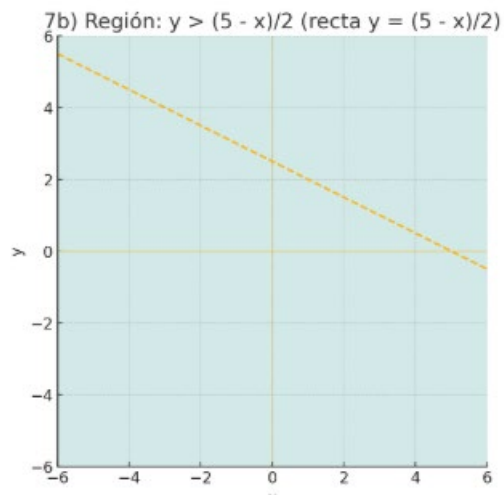
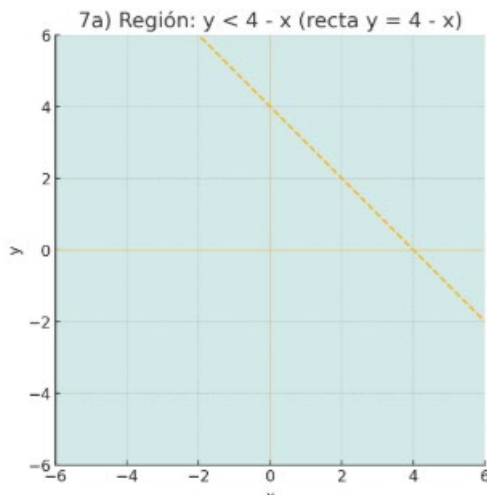
- Si es $<$ o $>$, la recta se toma discontinua y se sombrea **debajo** (si " $<$ ") o **encima** (si " $>$ ").
- Si es $\leq$ o $\geq$, la recta es continua e **incluida**.

a) $x+y-4 < 0 \Rightarrow y < 4-x$ (debajo de la recta $y = 4-x$).

b) $x+2y-5 > 0 \Rightarrow y > \frac{5-x}{2}$ (encima de $y = \frac{5-x}{2}$).

c) $2x+y+3 \leq 0 \Rightarrow y \leq -2x-3$ (debajo o sobre $y = -2x-3$).

d) $3x-y \geq 0 \Rightarrow y \leq 3x$ (debajo o sobre $y = 3x$).



a) $-x^2 - x + 6 \geq 0$

Multiplico por -1 (cambia el signo): $x^2 + x - 6 \leq 0$.

Factorizo: $(x + 3)(x - 2) \leq 0$.

Con raíces -3 y 2 y $a > 0$, ≤ 0 entre raíces:

$$[-3, 2].$$

b) $x^2 + x - 2 \leq 0$

$$(x + 2)(x - 1) \leq 0.$$

Raíces -2 y 1 , $a > 0 \Rightarrow$ solución entre raíces:

$$[-2, 1].$$

c) $2x^2 + 2x - 4 > 0$

Divido por $2 > 0$: $x^2 + x - 2 > 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1) > 0$.

Producto $> 0 \Rightarrow$ ambos factores del mismo signo $\Rightarrow$

$$(-\infty, -2) \cup (1, +\infty).$$

d) $x^2 + 2x + 2 < 0$

Discriminante $b^2 - 4ac = 4 - 8 = -4 < 0$. Con $a > 0$, la parábola es siempre positiva $\Rightarrow$

$\boxed{\emptyset}$ (no hay soluciones).

9. Resuelve

a) $x^2 - x + 2 > x + 5$

Pasa todo a la izquierda:

$$x^2 - x + 2 - (x + 5) > 0 \implies x^2 - 2x - 3 > 0$$

Factoriza:

$$(x - 3)(x + 1) > 0$$

Producto $> 0 \Rightarrow$ los dos factores con **el mismo signo** $\Rightarrow$

$$\boxed{(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)}.$$

b) $x^2 - x + 5 < 2x + 5$

Pasa todo a la izquierda:

$$x^2 - x + 5 - (2x + 5) < 0 \implies x^2 - 3x < 0$$

Saca factor común:

$$x(x - 3) < 0$$

Producto $< 0 \Rightarrow$ factores con **signos opuestos** $\Rightarrow$ ocurre **entre** las raíces:

$$\boxed{(0, 3)}.$$

c) (en el enunciado, al ordenar queda) $x^2 - 5x + 6 > 0$

Se reconoce

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Con $a > 0$, la parábola es positiva **fuera** de las raíces $\Rightarrow$

$$\boxed{(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)}.$$

a) $x^2 - x - 6 > 0$

Factorizo: $(x - 3)(x + 2) > 0$.

Con $a > 0 \Rightarrow$ solución fuera de -2 y 3 :

$$(-\infty, -2) \cup (3, +\infty).$$

b) $x^2 + 6x + 24 > 0$

Discriminante $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24 = 36 - 96 = -60 < 0$. Con $a > 0$, la parábola es siempre positiva $\Rightarrow$

$$\mathbb{R}.$$

c) $x^2 - 6x + 8 > 0$

$(x - 2)(x - 4) > 0 \Rightarrow$ fuera de 2 y 4 :

$$(-\infty, 2) \cup (4, +\infty).$$

d) $x^2 + 2x - 8 \geq 0$

$(x + 4)(x - 2) \geq 0 \Rightarrow$ fuera de -4 y 2 (incluyéndolos):

$$(-\infty, -4] \cup [2, +\infty).$$

e) $x^2 - 3x > 0$

$x(x - 3) > 0 \Rightarrow$ ambos factores con el mismo signo $\Rightarrow$

$$(-\infty, 0) \cup (3, +\infty).$$

f) $x^2 - 1 \geq 0$

$(x - 1)(x + 1) \geq 0 \Rightarrow$

$$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

a) $x(x+1) + 3x > 5x + 6$

$$x^2 + x + 3x > 5x + 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 > 0$$

$$(x-3)(x+2) > 0 \Rightarrow \boxed{(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)}$$

b) $(x-1)^2 - (x+3)^2 + x^2 + 9x + 8 \leq 0$

(Diferencia de cuadrados: $(x-1)^2 - (x+3)^2 = -8(x+1)$)

$$-8(x+1) + x^2 + 9x + 8 \leq 0 \Rightarrow x^2 + x \leq 0$$

$$x(x+1) \leq 0 \Rightarrow \boxed{[-1, 0]}$$

c) $x(x^2 - 2) - (x+1)(x^2 - 1) > -4 - x^2$

$$x^3 - 2x - (x^3 + x^2 - x - 1) > -4 - x^2$$

$$-x^2 - x + 1 > -4 - x^2 \quad \downarrow \quad -x > -5 \Rightarrow \boxed{x < 5}$$

a) $x^2 - 9x + 18 < 0$

Factorizo: $(x-3)(x-6) < 0$.

Con $a > 0$, " < 0 " se cumple **entre** raíces $\Rightarrow \boxed{(3, 6)}$.

b) $x^2 - 7x + 12 < 0$

$(x-3)(x-4) < 0 \Rightarrow$ solución **entre** 3 y 4: $\boxed{(3, 4)}$.

c) $x^2 - x + 5 < 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 20 = -19 < 0$. Con $a > 0$, la parábola es siempre > 0 .

$\boxed{\text{Sin solución}}$.

d) $2x^2 - 10x - 12 \leq 0$

Divido por 2 > 0 : $x^2 - 5x - 6 \leq 0 = (x-6)(x+1) \leq 0$.

Con $a > 0$, " ≤ 0 " **entre** raíces (incluidas): $\boxed{[-1, 6]}$.

e) $x^2 + x - 6 < 0$

$(x+3)(x-2) < 0 \Rightarrow$ **entre** -3 y 2: $\boxed{(-3, 2)}$.

f) $-3x^2 + 6x + 9 \leq 0$

Multiplico por -1 (cambia el signo): $3x^2 - 6x - 9 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 0 = (x - 3)(x + 1) \geq 0$.

Con $a > 0$, " ≥ 0 " fuera de las raíces: $\boxed{(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)}$.

a) $x(x + 1) + 3x > 5x + 6$

$$x^2 + x + 3x > 5x + 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 > 0$$

$$(x - 3)(x + 2) > 0 \Rightarrow \boxed{(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)}$$

b) $(x - 1)^2 - (x + 3)^2 + x^2 + 9x + 8 \leq 0$

(Diferencia de cuadrados: $(x - 1)^2 - (x + 3)^2 = -8(x + 1)$)

$$-8(x + 1) + x^2 + 9x + 8 \leq 0 \Rightarrow x^2 + x \leq 0$$

$$x(x + 1) \leq 0 \Rightarrow \boxed{[-1, 0]}$$

c) $x(x^2 - 2) - (x + 1)(x^2 - 1) > -4 - x^2$

$$x^3 - 2x - (x^3 + x^2 - x - 1) > -4 - x^2$$

$$-x^2 - x + 1 > -4 - x^2 \Rightarrow -x > -5 \Rightarrow \boxed{x < 5}$$

(Conjunto: $(-\infty, 5)$.)

d) $(2x - 5)^2 \leq 1$

$$-1 \leq 2x - 5 \leq 1 \Rightarrow 4 \leq 2x \leq 6 \Rightarrow \boxed{[2, 3]}$$

e) $2x(x + 2) + 6 > 0$ (equivalente con " ≥ 0 ")

$$2x^2 + 4x + 6 = 2[(x + 1)^2 + 2] > 0 \quad \forall x$$

$$\boxed{\mathbb{R}}$$

f) $-x(x + 1) + 2 \geq 0$

$$-x^2 - x + 2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 \leq 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1) \leq 0$$

$$\boxed{[-2, 1]}$$

13) Resuelve (pág. 2 del PDF)

Idea: para $\frac{P(x)}{Q(x)} \square 0$ (con $\square \in \{>, \geq, <, \leq\}$):

- "Dominio: $Q(x) \neq 0$."
- "Zeros de numerador y denominador $\rightarrow$ puntos críticos."
- "Analiza signos por intervalos."

a) $\frac{x - 3}{x + 1} > 0$.

Dominio: $x \neq -1$. Ceros: $x = 3$ (num.), $x = -1$ (den.).

Signos:

$(-\infty, -1)$: $-/- \Rightarrow + \checkmark$; $(-1, 3)$: $-/+ \Rightarrow - \times$; $(3, \infty)$: $+/+ \Rightarrow + \checkmark$.

Como es " $>$ ", no incluimos $x = 3$.

$$\boxed{(-\infty, -1) \cup (3, \infty)}$$

b) $\frac{3 - x}{x - 2} \geq 0$.

Dominio: $x \neq 2$. Ceros: $x = 3$ (num.), $x = 2$ (den.).

Signos:

$(-\infty, 2)$: $+/- \Rightarrow - \times$; $(2, 3)$: $+/+ \Rightarrow + \checkmark$; $(3, \infty)$: $-/+ \Rightarrow - \times$.

Incluye $x = 3$ por " $\geq$ ".

$$\boxed{(2, 3]}$$

c) $\frac{x}{2 - x} \geq 0$.

Dominio: $x \neq 2$. Ceros: $x = 0$ (num.), $x = 2$ (den.).

Signos:

$(-\infty, 0)$: $-/+ \Rightarrow - \times$; $(0, 2)$: $+/+ \Rightarrow + \checkmark$; $(2, \infty)$: $+/- \Rightarrow - \times$.

Incluye $x = 0$.

$$\boxed{[0, 2)}$$

$$d) \frac{x+2}{x^2} < 0.$$

Dominio: $x \neq 0$. Como $x^2 > 0$ para $x \neq 0$, el signo lo da el numerador:

$$x+2 < 0 \Rightarrow x < -2.$$

$$\boxed{(-\infty, -2)}$$

14) Resuelve las siguientes inecuaciones fraccionarias

Método: determina el **dominio** (denominador $\neq 0$), encuentra ceros del **numerador** y del **denominador** y estudia el **signo por intervalos**.

$$a) \frac{x-2}{x-1} > 0.$$

Dominio: $x \neq 1$. Ceros: num. $x = 2$.

Signo: $(-\infty, 1) +$, $(1, 2) -$, $(2, \infty) +$. (Estricto, sin $x = 2$).

$$\boxed{(-\infty, 1) \cup (2, \infty)}$$

$$b) \frac{2x-4}{x-1} > 0 = \frac{2(x-2)}{x-1} > 0.$$

Mismo estudio que (a).

$$\boxed{(-\infty, 1) \cup (2, \infty)}$$

$$c) \frac{x}{x+2} \geq 0.$$

Dominio: $x \neq -2$. Ceros: $x = 0$.

Signo: $(-\infty, -2) +$, $(-2, 0) -$, $(0, \infty) +$. Incluye $x = 0$.

$$\boxed{(-\infty, -2) \cup [0, \infty)}$$

$$d) \frac{x-3}{x+3} > 0.$$

Dominio: $x \neq -3$. Ceros: $x = 3$.

Signo: $(-\infty, -3) +$, $(-3, 3) -$, $(3, \infty) +$. (Estricto, sin $x = 3$).

$$\boxed{(-\infty, -3) \cup (3, \infty)}$$

$$e) \frac{x+1}{x-2} - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{x+1-2(x-2)}{x-2} \geq 0 = \frac{5-x}{x-2} \geq 0.$$

Dominio: $x \neq 2$. Ceros: $x = 5$.

Signo: $(-\infty, 2) -$, $(2, 5) +$, $(5, \infty) -$. Incluye $x = 5$.

$$\boxed{(2, 5]}$$

$$f) \frac{x+2}{x-1} > 1 \implies \frac{x+2}{x-1} - 1 > 0 \implies \frac{3}{x-1} > 0.$$

Como el numerador es > 0 , se requiere $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$ (y $x \neq 1$ por dominio).

$$(1, \infty)$$

15) Resuelve las siguientes inecuaciones (pág. 3 del PDF)

Clave: en fracciones racionales, determina el **dominio** (denominador $\neq 0$), localiza ceros del numerador/denominador y estudia el **signo por intervalos**. Si el denominador es siempre > 0 , el signo lo decide el numerador.

$$a) \frac{(x+2)(x-2)}{x^2+3} > 0$$

$$x^2 + 3 > 0 \forall x \Rightarrow \text{basta } (x+2)(x-2) > 0 \Rightarrow \text{fuera de } [-2, 2].$$

$$(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$$

$$b) \frac{(x+3)(2x-4)}{x^2+1} > 0$$

$$x^2 + 1 > 0 \forall x. \text{ Como } 2x - 4 = 2(x - 2), \text{ queda } (x+3)(x-2) > 0 \Rightarrow \text{fuera de } [-3, 2].$$

$$(-\infty, -3) \cup (2, \infty)$$

$$c) \frac{x^2+1}{x^2-1} > 0$$

$$\text{Numerador} > 0 \forall x. \text{ Pedimos } x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x < -1 \text{ o } x > 1 \text{ (excluye } \pm 1).$$

$$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

$$d) \frac{-x^2 + 3x - 2}{x^2 + 1} \geq 0$$

Denominador > 0 . Equivalentemente $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$. Multiplico por -1 (cambia el signo):

$$x^2 - 3x + 2 \leq 0 = (x - 1)(x - 2) \leq 0 \Rightarrow \text{entre raíces (incluidas):}$$

$$\boxed{[1, 2]}$$

$$e) \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - x - 6} \geq 0$$

$$(x^2 + 4x + 4) = (x + 2)^2 \geq 0. \text{ Denominador } (x - 3)(x + 2), \text{ con } x \neq -2, 3.$$

Como el numerador es > 0 salvo en $x = -2$ (no válido porque anula el denominador), el signo lo da el denominador: > 0 si $x < -2$ o $x > 3$.

$$\boxed{(-\infty, -2) \cup (3, \infty)}$$

$$f) \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 4} > 0 = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 2)^2} > 0$$

$$(x - 2)^2 > 0 \text{ para } x \neq 2. \text{ Pedimos } (x - 1)(x + 1) > 0 \Rightarrow x < -1 \text{ o } x > 1. \text{ Además } x \neq 2.$$

$$\boxed{(-\infty, -1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)}$$

16) Resuelve las siguientes inecuaciones (pág. 3 del PDF).

Método: determina el **dominio**, localiza ceros de numerador/denominador y estudia el **signo por intervalos**. Si el denominador es siempre > 0 , el signo lo decide el numerador.

$$a) \frac{x(x + 2)}{x - 2} > 0.$$

Dom.: $x \neq 2$. Puntos críticos: $-2, 0, 2$.

Signos en $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, \infty) \Rightarrow +$ solo en $(-2, 0)$ y $(2, \infty)$.

$$\boxed{(-2, 0) \cup (2, \infty)}.$$

$$b) \frac{x^2 - 4}{x} \geq 0 = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x} \geq 0.$$

Dom.: $x \neq 0$. Críticos: $-2, 0, 2$.

Signo $+$ en $[-2, 0)$ y $[2, \infty)$ (incluye ± 2).

$$\boxed{[-2, 0) \cup [2, \infty)}.$$

$$c) \frac{1 - x^2}{x^2 - 4} > 0 = \frac{-(x - 1)(x + 1)}{(x - 2)(x + 2)} > 0.$$

Dom.: $x \neq \pm 2$. Críticos: $-2, -1, 1, 2$.

Signo $+$ en $(-2, -1)$ y $(1, 2)$ (no incluye ± 1 porque " $>$ ").

$$\boxed{(-2, -1) \cup (1, 2)}.$$

$$d) \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x + 6} > 0.$$

$$\Delta_{den} = 9 - 24 < 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 6 > 0 \forall x.$$

$$\text{Equivale a } (x - 3)(x + 2) > 0 \Rightarrow x < -2 \text{ o } x > 3.$$

$$\boxed{(-\infty, -2) \cup (3, \infty)}.$$

$$e) \frac{x(x - 2)}{(x + 1)(x + 3)} \geq 0.$$

$$\text{Dom.: } x \neq -1, -3. \text{ Críticos: } -3, -1, 0, 2.$$

$$\text{Signo } + \text{ en } (-\infty, -3), (-1, 0] \text{ e } [2, \infty).$$

$$\boxed{(-\infty, -3) \cup (-1, 0] \cup [2, \infty)}.$$

$$f) \frac{x + 2}{x - 1} \geq \frac{2x - 1}{x + 2} - 1.$$

$$\frac{x + 2}{x - 1} - \frac{x - 3}{x + 2} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x + 2)^2 - (x - 3)(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)} \geq 0 \Rightarrow \frac{8x + 1}{(x - 1)(x + 2)} \geq 0.$$

$$\text{Dom.: } x \neq 1, -2. \text{ Críticos: } -2, -\frac{1}{8}, 1.$$

$$\text{Signo } + \text{ en } (-2, -\frac{1}{8}] \text{ y } (1, \infty).$$

$$\boxed{(-2, -\frac{1}{8}] \cup (1, \infty)}.$$

$$g) \frac{1}{\frac{x}{1} - 1} > \frac{3}{\frac{x}{3} + 1}.$$

$$\frac{1}{x - 1} - \frac{3}{x + 1} = \frac{-2x + 4}{(x - 1)(x + 1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{2 - x}{(x - 1)(x + 1)} > 0.$$

$$\text{Dom.: } x \neq \pm 1. \text{ Críticos: } -1, 1, 2.$$

$$\text{Signo } + \text{ en } (-\infty, -1) \text{ y } (1, 2).$$

$$\boxed{(-\infty, -1) \cup (1, 2)}.$$

17) Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones (pág. 3 del PDF).

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x}{2} + x < 4 \\ \frac{3}{2} - \frac{x}{3} > 0 \end{cases}$$

$$1. \frac{4x}{3} < 4 \Rightarrow x < 3.$$

$$2. \frac{x}{6} > 0 \Rightarrow x > 0.$$

$$\text{Solución: } \boxed{(0, 3)}.$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{x-4}{2} + \frac{x+2}{3} \leq 2 \\ \frac{x}{3} - \frac{x}{2} \leq 1 \end{cases}$$

$$1. 3(x-4) + 2(x+2) \leq 12 \Rightarrow 5x - 8 \leq 12 \Rightarrow x \leq 4.$$

$$2. -\frac{x}{6} \leq 1 \Rightarrow x \geq -6.$$

$$\text{Solución: } \boxed{[-6, 4]}.$$

Nota: en la línea de soluciones impresa se lee $[-6, 5]$, pero $x = 5$ no cumple la primera desigualdad; parece un pequeño fallo de imprenta.

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{2x-2}{5} \leq 0 \\ \frac{3x+9}{3} \geq 0 \end{cases}$$

$$1. x - 1 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1.$$

$$2. x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3.$$

$$\text{Solución: } \boxed{[-3, 1]}.$$

$$\text{d) } \begin{cases} x - 3 < 0 \\ \frac{2x-8}{3} \geq 0 \end{cases}$$

$$1. x < 3.$$

$$2. x \geq 4.$$

$$\text{Solución: } \boxed{\emptyset} \text{ (no hay intersección).}$$

$$\text{e) } \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{x}{2} \geq 1 \\ (x+1)^2 - x^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$1. -\frac{x}{6} \geq 1 \Rightarrow x \leq -6.$$

$$2. 2x + 1 \leq 1 \Rightarrow x \leq 0.$$

$$\text{Solución: } \boxed{(-\infty, -6]}.$$

$$\text{f) } \begin{cases} \frac{x-3}{x} \geq \frac{2}{5} \\ \frac{x-2}{2} + \frac{x+2}{3} \leq 3 \end{cases}$$

$$\text{Primera: } \frac{x-3}{x} - \frac{2}{5} = \frac{3(x-5)}{5x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-5}{x} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup [5, \infty) \text{ (con } x \neq 0).$$

$$\text{Segunda: } 3(x-2) + 2(x+2) \leq 18 \Rightarrow 5x - 2 \leq 18 \Rightarrow x \leq 4.$$

$$\text{Solución: intersección } \boxed{(-\infty, 0]}.$$

18) Halla el conjunto de soluciones de los siguientes sistemas (pág. 3 del PDF)

Clave: resolver **cada** inecuación y tomar la **intersección** de los intervalos.

$$\text{a) } \begin{cases} x - 5 > 0 \\ x + 8 > 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5$$

$$\bullet \quad x + 8 > 0 \Rightarrow x > -8$$

$$\text{Intersección: } \boxed{(5, \infty)}.$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2 - x > 0 \\ 1 + x > 0 \end{cases}$$

- $2 - x > 0 \Rightarrow x < 2$
- $1 + x > 0 \Rightarrow x > -1$

Intersección: $\boxed{(-1, 2)}$.

$$\text{c) } \begin{cases} x + 3 > 0 \\ x - 2 \leq 0 \end{cases}$$

- $x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$
- $x - 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2$

Intersección: $\boxed{(-3, 2]}$.

$$\text{d) } \begin{cases} x \geq 0 \\ 1 + x < 0 \end{cases}$$

- $x \geq 0$
- $1 + x < 0 \Rightarrow x < -1$

No hay intersección $\Rightarrow \boxed{\emptyset}$.

19) Resuelve los sistemas (pág. 3 del PDF)

$$\text{a) } \begin{cases} x + 3 > 0 \\ x^2 + x - 2 < 0 \end{cases}$$

- $x > -3$.
- $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1) < 0 \Rightarrow x \in (-2, 1)$.

Solución: $\boxed{(-2, 1)}$.

$$\text{b) } \begin{cases} (x + 1)^2 - (x - 2)(x + 1) > 0 \\ \frac{x}{x - 2} > 0 \end{cases}$$

- $(x + 1)[(x + 1) - (x - 2)] = 3(x + 1) > 0 \Rightarrow x > -1$.
- $\frac{x}{x - 2} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.

Solución: intersección $\boxed{(-1, 0) \cup (2, \infty)}$.

20) Traduce a lenguaje algebraico (pág. 4)

a) "El doble de un número más 3 unidades es menor que 10"

$$2x + 3 < 10.$$

b) "El cuadrado de un número es mayor que el triple de ese número menos 2"

$$x^2 > 3x - 2.$$

c) "Si tuviera 10 euros más, superaría el precio del libro (30 €)"

$$x + 10 > 30.$$

21) Problema de comisiones (pág. 4)

A: $I_A = n + 500$. B: $I_B = 1,5n + 300$.

Queremos $I_B > I_A \Rightarrow 1,5n + 300 > n + 500 \Rightarrow 0,5n > 200 \Rightarrow n > 400$.

Si n es entero, al menos 401 artículos.

22) "Su cuadrado excede al propio número en más de 2" (pág. 4)

$$x^2 - x > 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) > 0.$$

Solución: $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$.

23) Padre e hijo (30 años de diferencia) (pág. 4)

Sea x la edad del hijo; padre $x + 30$.

"Excede en más de 10 al doble del hijo": $x + 30 > 2x + 10 \Rightarrow x < 20$.

Con $x \geq 0$: de 0 a 20 años del hijo (padre de 30 a 50).

$$0 \leq x < 20.$$

24) "Su cuádruplo excede a su doble en más de 10" (pág. 4)

$$4x - 2x > 10 \Rightarrow 2x > 10 \Rightarrow x > 5.$$