

TEMA 3

RAÍCES DE UN POLINOMIO

1. Determina las raíces enteras de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = 2x^3 - 10x^2 + 12x - 4$

d) $P(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9$

b) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$

e) $P(x) = x^2 + 7x$

c) $P(x) = (x - 3)(x + 2)(x - 5)$

f) $P(x) = x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x$

2. ¿Es -2 una raíz de $P(x) = -3x^2 + 2x - 4$?

3. Comprueba si -3 y 2 son raíces del polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 - x - 3$.

4. Determina el valor de m para que -2 sea una raíz de $P(x) = 3x^2 - x + m$.

5. Determina el valor de m para que 1 sea una raíz de $P(x) = 2x^3 - mx + 1$.

6. Determina el valor de m para que $-1/2$ sea una raíz de $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 4m + 3$.

DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN POLINOMIO

1. Descompón factorialmente los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$

b) $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

c) $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

d) $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4$

e) $P(x) = 8x^3 + 2x^2 - 13x + 3$

f) $P(x) = x^2 - 14x + 49$

g) $P(x) = x^3 + 1$

2. Escribe un polinomio que tenga como raíces 3 , -1 y 5 .

3. Escribe un polinomio que tenga como raíces 0 (dos veces), -1 (tres veces) y 2 (una vez).

4. Halla un polinomio de segundo grado sabiendo que una de sus raíces es -5 y que $P(2) = -7$.

5. Escribe un polinomio cuyas raíces sean 3 y 5 y que el coeficiente del término de mayor grado sea 7 .

SOLUCIONES

1) Determina las raíces enteras

a) $P(x) = 2x^3 - 10x^2 + 12x - 4$

Candidatos: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

$P(1) = 0 \Rightarrow (x - 1)$ es factor.

$$P(x) = (x - 1)(2x^2 - 8x + 4) = (x - 1)2(x^2 - 4x + 2).$$

Las otras raíces son $2 \pm \sqrt{2}$ (no enteras).

Raíces enteras: $\boxed{1}$.

b) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$

$P(1) = 0 \Rightarrow (x - 1)$ es factor. Dividiendo de nuevo por $(x - 1)$:

$$P(x) = (x - 1)^2(x^2 - 4) = (x - 1)^2(x - 2)(x + 2).$$

Raíces enteras: $\boxed{1 \text{ (doble)}, 2, -2}$.

c) $P(x) = (x - 3)(x + 2)(x - 5)$

Raíces enteras: $\boxed{3, -2, 5}$.

d) $P(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9$

$$P(1) = 0, P(3) = 0.$$

$$P(x) = (x - 1)(x - 3)^2(x + 1).$$

Raíces enteras: $\boxed{1, 3 \text{ (doble)}, -1}$.

e) $P(x) = x^2 + 7x$

$$x(x + 7) = 0.$$

Raíces enteras: $\boxed{0, -7}$.

f) $P(x) = x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x$

x es factor claro: $x(x^3 - x^2 - 16x - 20)$.

En el cúbico, $x = 5$ es raíz $\rightarrow (x - 5)(x + 2)^2$.

$$P(x) = x(x - 5)(x + 2)^2.$$

Raíces enteras: $\boxed{0, 5, -2 \text{ (doble)}}$.

2) ¿Es -2 raíz de $P(x) = -3x^2 + 2x - 4$?

$$P(-2) = -3(4) + 2(-2) - 4 = -20 \neq 0. \text{ No.}$$

3) ¿Son -3 y 2 raíces de $P(x) = x^4 + 3x^3 - x - 3$?

$$P(-3) = 81 - 81 + 3 - 3 = 0 \Rightarrow -3 \text{ sí lo es.}$$

$$P(2) = 16 + 24 - 2 - 3 = 35 \neq 0 \Rightarrow 2 \text{ no lo es.}$$

4) Halla m para que -2 sea raíz de $P(x) = 3x^2 - x + m$.

$$P(-2) = 3(4) - (-2) + m = 14 + m = 0 \Rightarrow \boxed{m = -14}.$$

5) Halla m para que 1 sea raíz de $P(x) = 2x^3 - mx + 1$.

$$P(1) = 2 - m + 1 = 3 - m = 0 \Rightarrow \boxed{m = 3}.$$

6) Halla m para que $-\frac{1}{2}$ sea raíz de $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 4m + 3$.

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{8}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) - 4m + 3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 4m + 3 = \frac{13}{4} - 4m = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m = \frac{13}{16}}.$$

DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN POLINOMIO

1) Descompón factorialmente

a) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$

Raíces 1 y 2.

$$\boxed{(x-1)(x-2)^2(x+1)}.$$

b) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

Raíz 2.

$$\boxed{(x-2)(x+1)(x+3)}.$$

c) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

Raíz 1.

$$\boxed{(x-1)(x-2)(x+1)}.$$

d) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4$

Raíces -1 y 2 .

$$\boxed{(x+1)^2(x-2)(x+2)}.$$

e) $8x^3 + 2x^2 - 13x + 3$

Raíz 1.

$$\boxed{(x-1)(4x-1)(2x+3)}.$$

f) $x^2 - 14x + 49$

$$\boxed{(x-7)^2}.$$

g) $x^3 + 1$

$$(x + 1)(x^2 - x + 1).$$

2) Polinomio con raíces 3, -1 , 5 (mónico):

$$(x - 3)(x + 1)(x - 5) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15.$$

3) Polinomio con raíces 0 (doble), -1 (triple) y 2 (simple):

$$x^2(x + 1)^3(x - 2).$$

4) Polinomio de segundo grado, una raíz -5 y $P(2) = -7$ (tomando coeficiente líder 1):

Sea $P(x) = x^2 + bx + c$.

$$P(-5) = 0 \Rightarrow 25 - 5b + c = 0.$$

$$P(2) = -7 \Rightarrow 4 + 2b + c = -7.$$

Resolviendo: $b = 2$, $c = -15$.

$$P(x) = x^2 + 2x - 15.$$

5) Polinomio con raíces 3 y 5 y coeficiente líder 7:

$$7(x - 3)(x - 5) = 7x^2 - 56x + 105.$$