

TEMAS 1 EJERCICIOS

NÚMEROS COMPLEJOS

1. Dados los siguientes números complejos:

$$\begin{aligned} z_1 &= 4 - 5i & z_2 &= 2 + 3i & z_3 &= -3 + 5i & z_4 &= 6 + 2i \\ z_5 &= (7, 8) & z_6 &= (-4, -9) & z_7 &= (-12, 2) & z_8 &= (4, 5) \end{aligned}$$

efectúa las siguientes operaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} 1) \quad & z_1 + z_2 & 5) \quad & z_1 \div z_2 \\ 2) \quad & z_4 - z_3 & 6) \quad & z_3 \div z_4 \\ 3) \quad & z_8 + z_7 & 7) \quad & \frac{z_1}{z_2 \cdot z_1} \\ 4) \quad & \frac{z_1 \cdot z_3}{z_4} & 8) \quad & \frac{z_2 \cdot z_3}{z_4} \end{aligned}$$

2. Calcula las partes reales e imaginarias de:

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{3-2i}{2+i} & h) \quad & \frac{1}{(1-i)^5} & m) \quad & \frac{4+i}{1-3i} \\ b) \quad & \frac{3-2i}{2-3i} & i) \quad & \frac{5-5i}{3+4i} & n) \quad & \frac{1+3i}{2+i} \\ c) \quad & (1-i)(1+i)i & j) \quad & (5-i)(1+5i) & ñ) \quad & \frac{(2-i)(1-2i)^2}{3+i} \\ d) \quad & (1+i)^4 & k) \quad & (2+5i)^3 & o) \quad & (3-2i)^3 \\ e) \quad & \frac{(1-i)^5}{(1+i)^5} & l) \quad & \frac{1}{(1-i)^6} & p) \quad & \frac{(1+i)(1-i)^4}{(1+2i)^3} \\ f) \quad & (1-i)(2+3i)(3+i)(2-2i) & q) \quad & i^{3459} \\ g) \quad & \frac{1}{2+i\sqrt{3}} - \frac{2}{1+i\sqrt{3}} + \frac{5/2-i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}} \end{aligned}$$

3. Sean z y w dos números complejos cualesquiera. Comprueba la igualdad $\underline{z} \cdot \underline{w} = \underline{z \cdot w}$

4. Dados los números complejos $z_1 = 2i$, $z_2 = -i$ y $z_3 = 4i$, calcula:
 - a) $z_3 \cdot z_2$
 - b) $\frac{z_1}{(z_2)^2}$
 - c) $\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$
 - d) $z_1 \cdot z_2$
 - e) $\frac{(z_1)^3}{z_2 \cdot (z_3)^2}$

5. Sea $z = \frac{k+i}{2+i}$. Calcula el valor de k para que $z = 2 - i$.

6. Sea $z = (3-6i)(4-ki)$. Calcula el valor de k para que z sea un número imaginario puro.

7. Sea $z = (3-6i)(4-ki)$. Calcula el valor de k para que z sea un número real.

8. Calcula m y n para que se cumpla la igualdad: $\frac{4m-2i}{3+ni} = 6-2i$.

9. La suma de dos números complejos es $3+i$ y la parte real de uno de ellos es 2. Determina dichos números sabiendo que su cociente es imaginario puro.

10. Sea $z = \frac{k+i}{2+i}$. Calcula el valor de k para que $|z| = \sqrt{2}$.

11. La suma de las partes reales de dos complejos conjugados es 6 y el módulo de uno de ellos es 5. Calcula ambos números.

12. Expresa en forma polar:
 - a) $4-3i$
 - b) $5+12i$
 - c) $-3+3i$
 - d) $-2-4i$

13. Escribe en forma polar el resultado del cociente: $\frac{i^5 - i^{-8}}{i\sqrt{2}}$
14. Expresa en forma trigonométrica los complejos:
 a) $-3 + 3\sqrt{3}i$ b) $1 - i$
 c) $6 - 5i$ d) $-9 - 8i$
15. Expresa en forma binómica los siguientes complejos:
 a) 7_{120° b) $2_{\pi/6}$ c) $3_{3\pi/4}$ d) 5_{135°
16. Determina las formas polar y trigonométrica de los números:
 a) $-2\sqrt{3} - 2i$ b) $3 - 3\sqrt{3}i$
 c) $-4 + 4i$ d) $7 + 7i$
17. Hallar los números complejos tales que $\bar{z} = z^{-1}$.
18. Escribe en forma binómica y en forma de par el cociente de los números 6_{120° .
19. Realiza las operaciones en forma polar y después pasa a forma binómica:
 a) $3_{45^\circ} \cdot 2_{15^\circ}$ e) $1_{33^\circ} \cdot 2_{16^\circ} \cdot 3_{41^\circ}$ i) $5_{23^\circ} \cdot 3_{97^\circ}$
 b) $9_{17^\circ} : 3_{97^\circ}$ f) $(2_{51^\circ})^4 : (4_{72^\circ})^2$ j) $2_{106^\circ} : 1_{61^\circ}$
 c) $6_{-21^\circ} : 2_{24^\circ}$ g) $(2_{25^\circ})^3 \cdot 3_{15^\circ}$ k) $(1_{45^\circ})^{18} : (2_{90^\circ})^3$
 d) $(\sqrt{2} - i)^6$ h) $(3 - 3i)^8$ l) $(-2 + 2i)^{10}$
20. Calcula el resultado de las siguientes operaciones, y escríbelos en todas las formas que conozcas:
 a) $\frac{(1+i)(1-i)^5}{2 - 2\sqrt{3}i}$ b) $\frac{2}{1 - \sqrt{3}i} + \frac{2}{1 + \sqrt{3}i} + \frac{2}{1 + i}$

SOLUCIONES

Ejercicio 1

Datos (tal como aparecen):

$$z_1 = 4 - 5i, z_2 = 2 + 3i, z_3 = -3 + 5i, z_4 = 6 + 2i, z_7 = -12 + 2i, z_8 = 4 + 5i.$$

Operaciones:

1. $z_1 + z_2$

$$(4 - 5i) + (2 + 3i) = 6 - 2i.$$

2. $z_4 - z_3$

$$(6 + 2i) - (-3 + 5i) = 9 - 3i.$$

3. $z_8 + z_7$

$$(4 + 5i) + (-12 + 2i) = -8 + 7i.$$

4. $z_1 \cdot z_3$

$$(4 - 5i)(-3 + 5i) = 4(-3) + 4(5i) - 5i(-3) - 5i(5i) = -12 + 20i + 15i - 25i^2 = 13 + 35i.$$

5. $z_1 \div z_2$

$$\frac{4 - 5i}{2 + 3i} \cdot \frac{2 - 3i}{2 - 3i} = \frac{(4 - 5i)(2 - 3i)}{2^2 + 3^2} = \frac{8 - 12i - 10i + 15i^2}{13} = \frac{-7 - 22i}{13}.$$

6. $z_3 \div z_4$

$$\frac{-3 + 5i}{6 + 2i} \cdot \frac{6 - 2i}{6 - 2i} = \frac{(-3 + 5i)(6 - 2i)}{6^2 + 2^2} = \frac{-18 + 36i + 10}{40} = -\frac{1}{5} + \frac{9}{10}i.$$

7. $\frac{\overline{z_1}}{z_2 \cdot \overline{z_1}}$

$$\overline{z_1} = 4 + 5i.$$

$$z_2 \overline{z_1} = (2 + 3i)(4 + 5i) = -7 + 22i.$$

$$\frac{4 + 5i}{-7 + 22i} \cdot \frac{-7 - 22i}{-7 - 22i} = \frac{82 - 123i}{533} = \frac{82}{533} - \frac{123}{533}i.$$

8. $\frac{z_2 \cdot \overline{z_3}}{z_4}$

$$\overline{z_3} = -3 - 5i.$$

$$z_2 \overline{z_3} = (2 + 3i)(-3 - 5i) = 9 - 19i.$$

$$\frac{9 - 19i}{6 + 2i} \cdot \frac{6 - 2i}{6 - 2i} = \frac{16 - 132i}{40} = \frac{2}{5} - \frac{33}{10}i.$$

Ejercicio 2 — “Calcula las partes reales e imaginarias de ...”

Los siguientes apartados se leen bien; los demás los dejo en blanco (—).

a) $\frac{3 - 2i}{2 + i}$

$$\frac{3 - 2i}{2 + i} \cdot \frac{2 - i}{2 - i} = \frac{6 - 7i - 2}{5} = \boxed{\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i}.$$

b) $\frac{3 - 2i}{2 - 3i} = \frac{(3 - 2i)(2 + 3i)}{13} = \boxed{\frac{12}{13} + \frac{5}{13}i}.$

Ejercicio 2 — “Calcula las partes reales e imaginarias de ...”

Los siguientes apartados se leen bien; los demás los dejo en blanco (—).

a) $\frac{3-2i}{2+i}$

$$\frac{3-2i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{6-7i-2}{5} = \boxed{\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i}.$$

b) $\frac{3-2i}{2-3i} = \frac{(3-2i)(2+3i)}{13} = \boxed{\frac{12}{13} + \frac{5}{13}i}.$

c) $(1-i)(1+i)i = (1-i^2)i = 2i.$

$\boxed{2i}$

d) $(1+i)^4 = [(1+i)^2]^2 = (2i)^2 = -4.$

$\boxed{-4}$

e) $\frac{(1-i)^5}{(1+i)^5} = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5 = (-i)^5 = \boxed{-i}.$

f) $(1-i)(2+3i)(3+i)(2-2i)$

$(1-i)(2+3i) = 5+i$

$(3+i)(2-2i) = 8-4i$

$(5+i)(8-4i) = 44-12i.$

$\boxed{44-12i}$

g) — (no legible con seguridad)

h) $\frac{1}{(1-i)^2} = \frac{1}{-2i} = \boxed{\frac{i}{2}}.$

i) $\frac{5-5i}{3+4i} = \frac{(5-5i)(3-4i)}{25} = -\frac{1}{5} - \frac{7}{5}i.$

j) $(5-i)(1+5i) = 10+24i.$

k) $(2+5i)^3 = -142-65i.$

l) $\frac{1}{(1-i)^6} = \frac{1}{(-2i)^3} = \frac{1}{8i} = -\frac{i}{8}.$

m) $\frac{4+i}{1-3i} = \frac{(4+i)(1+3i)}{10} = \boxed{\frac{1}{10} + \frac{13}{10}i}.$

n) — (no legible con seguridad)

o) $(3-2i)^3 = -9-46i.$

p) $\frac{(1+i)(1-i)^4}{(1+2i)^3} = \frac{-4-4i}{-11+2i} = \boxed{\frac{52}{125} + \frac{36}{125}i}.$

q) — (el exponente de i no se distingue con claridad)

3.

Enunciado (ya nítido): "Sean z y w dos números complejos cualesquiera. Comprueba la igualdad

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

"

| (Es la propiedad estándar del conjugado respecto del producto).

Demostración paso a paso

Sea $z = a + bi$ y $w = c + di$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. Producto $z \cdot w$:

$$z \cdot w = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

2. Conjugado de ese producto:

$$\overline{z \cdot w} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i.$$

3. Conjugados por separado:

$$\overline{z} = a - bi, \quad \overline{w} = c - di.$$

4. Producto de los conjugados:

$$\overline{z} \overline{w} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i.$$

5. Comparación:

Los resultados en 2) y 4) coinciden exactamente, por lo tanto:

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \overline{w}.$$

4.

Datos: $z_1 = 2i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 4i$.

Te resuelvo lo que se ve claro en la imagen (a-e). En el apartado c) parece no haber conjugados; el resultado coincide también si hubiera barras de conjugado (lo indico).

a) $z_3 \cdot z_2$

$$z_3 z_2 = (4i)(-i) = -4i^2 = 4.$$

Resultado: $\boxed{4}$

b) $\frac{z_1}{(z_2)^2}$

$$(z_2)^2 = (-i)^2 = -1 \implies \frac{z_1}{(z_2)^2} = \frac{2i}{-1} = -2i.$$

Resultado: $\boxed{-2i}$

c) $\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$ (si hubiera conjugados en z_1, z_2 , el valor es el mismo)

$$z_1 z_2 = (2i)(-i) = -2i^2 = 2, \quad \frac{2}{4i} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}.$$

Resultado: $\boxed{-\frac{i}{2}}$

d) $z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2}$

$$\frac{2i}{-i} = -2.$$

Resultado: $\boxed{-2}$

e) $\frac{(z_1)^3}{z_2 (z_3)^2}$

$$(z_1)^3 = (2i)^3 = 8i^3 = -8i, \quad (z_3)^2 = (4i)^2 = 16i^2 = -16.$$

$$z_2 (z_3)^2 = (-i)(-16) = 16i.$$

$$\frac{-8i}{16i} = -\frac{1}{2}.$$

Resultado: $\boxed{-\frac{1}{2}}$

5.

Sea $z = \frac{k+i}{2+i}$. Calcula k para que $z = 2 - i$.

$$\frac{k+i}{2+i} = 2-i \implies k+i = (2-i)(2+i) = 4-i^2 = 5$$
$$\implies k = 4.$$

Resultado: $k = 4$.

6.

Sea $z = (3 - 6i)(4 - ki)$. Calcula k para que z sea imaginario puro (parte real = 0).

$$(3 - 6i)(4 - ki) = 12 - 6k + (-3k - 24)i$$

$$\text{Parte real} = 0 \implies 12 - 6k = 0 \implies k = 2.$$

7.

Mismo $z = (3 - 6i)(4 - ki)$. Calcula k para que z sea real (parte imaginaria = 0).

$$\text{Im}(z) = -3k - 24 = 0 \implies k = -8.$$

Resultado: $k = -8$ y entonces $z = 60$ (real).

8.

Halla m y n para que

$$\frac{4m - 2i}{3 + ni} = 6 - 2i.$$

Igualemos numeradores tras multiplicar:

$$4m - 2i = (6 - 2i)(3 + ni) = 18 + 2n + (6n - 6)i.$$

Comparando partes:

$$\begin{cases} 4m = 18 + 2n \\ -2 = 6n - 6 \end{cases} \implies n = \frac{2}{3}, \quad 4m = 18 + \frac{4}{3} = \frac{58}{3} \implies m = \frac{29}{6}.$$

Resultado: $m = \frac{29}{6}, n = \frac{2}{3}$.

9.

La suma de dos complejos es $3 + i$ y la **parte real de uno** es 2. Determinalos sabiendo que su **cociente es imaginario puro**.

Sea $z_1 = 2 + bi$. Entonces $z_2 = (3 + i) - z_1 = 1 + (1 - b)i$.

Que $\frac{z_1}{z_2}$ sea imaginario puro $\Rightarrow$ su parte real = 0.

$$\frac{2 + bi}{1 + (1 - b)i} \text{ tiene parte real } \frac{2 + b(1 - b)}{1 + (1 - b)^2} = 0$$
$$\Rightarrow 2 + b(1 - b) = 0 \Rightarrow b^2 - b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2 \text{ o } b = -1.$$

Dos soluciones:

- $b = 2: z_1 = 2 + 2i, z_2 = 1 - i.$
- $b = -1: z_1 = 2 - i, z_2 = 1 + 2i.$

Resultado: $(2 + 2i, 1 - i)$ o $(2 - i, 1 + 2i)$.

10.

Sea $z = \frac{k + i}{2 + i}$. Calcula k para que $|z| = \sqrt{2}$.

$$|z| = \frac{|k + i|}{|2 + i|} = \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2} \Rightarrow k^2 + 1 = 10 \Rightarrow k = \pm 3.$$

Resultado: $k = 3$ o $k = -3$.

11.

La suma de las **partes reales** de dos complejos **conjugados** es 6 y el **módulo de uno** es 5. Hallarlos.

Sea $z = a + bi$ y $\bar{z} = a - bi$.

Suma de reales: $a + a = 6 \Rightarrow a = 3.$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 5 \Rightarrow 9 + b^2 = 25 \Rightarrow b = \pm 4.$

Resultado: $3 + 4i$ y $3 - 4i$.

12. Expresa en forma polar

(Escribo $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r \operatorname{cis} \theta$. Doy grados y radianes.)

a) $4 - 3i$

$$r = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5.$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-3}{4}\right) \approx -36,87^\circ = -0,6435 \text{ rad (o } 323,13^\circ).$$

$$\boxed{5 \operatorname{cis}(-0,6435)}.$$

b) $5 + 12i$

$$r = \sqrt{25 + 144} = 13.$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{12}{5}\right) \approx 67,38^\circ = 1,1760 \text{ rad.}$$

$$\boxed{13 \operatorname{cis}(1,1760)}.$$

c) $-3 + 3i$

$$r = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

$$\text{Cuadrante II} \Rightarrow \theta = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\boxed{3\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)}.$$

d) $-2 - 4i$

$$r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{Cuadrante III} \Rightarrow \theta = \pi + \arctan 2 \approx 243,435^\circ = 4,2487 \text{ rad (o } -116,565^\circ).$$

$$\boxed{2\sqrt{5} \operatorname{cis}(4,2487)}.$$

13. Escribe en forma polar el resultado del cociente

$$\frac{i^5 - i^7}{i\sqrt{2}}$$

$$i^5 = i, \quad i^7 = i^3 = -i \Rightarrow i^5 - i^7 = i - (-i) = 2i.$$

$$\frac{2i}{i\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Número real y positivo: $r = \sqrt{2}$, $\theta = 0$.

$$\text{Resultado: } \boxed{\sqrt{2}(\cos 0 + i \sin 0)}.$$

14. Expresa en forma trigonométrica los complejos

a) $-3 + 3\sqrt{3}i$

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6, \quad \theta = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}.$$

$$6 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

b) $1 - i$

$$r = \sqrt{2}, \quad \theta = -45^\circ = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

c) $6 - 5i$

$$r = \sqrt{61}, \quad \theta = -\arctan \frac{5}{6} \approx -0,6947 \text{ rad.}$$

$$\sqrt{61} (\cos \theta + i \sin \theta), \quad \theta \approx -0,6947$$

d) $-9 - 8i$

$$r = \sqrt{145}, \quad \theta = \pi + \arctan \frac{8}{9} \approx 3,8682 \text{ rad.}$$

$$\sqrt{145} (\cos \theta + i \sin \theta), \quad \theta \approx 3,8682$$

15. Expresa en forma binómica

a) 7_{120° :

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}, \quad \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-\frac{7}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{2}i$$

b) $2_{\pi/6}$:

$$\sqrt{3} + 1i$$

c) $3_{3\pi/4}$:

$$-\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

d) 5_{135° (la que me confirmaste):

$$-\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$$

16. Determina las formas polar y trigonométrica

a) $-2\sqrt{3} - 2i$

$$r = \sqrt{12 + 4} = 4, \theta = 210^\circ = \frac{7\pi}{6}.$$

$$\boxed{4 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6}}.$$

b) $3 - 3\sqrt{3}i$

$$r = 6, \theta = -60^\circ = -\frac{\pi}{3}.$$

$$\boxed{6 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{3}\right)}.$$

c) $-4 + 4i$

$$r = 4\sqrt{2}, \theta = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\boxed{4\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}}.$$

d) $7 + 7i$

$$r = 7\sqrt{2}, \theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}.$$

$$\boxed{7\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}}.$$

17. Hallar los complejos tales que $\bar{z} = z^{-1}$.

Sea $z = re^{i\theta}$. Entonces $\bar{z} = re^{-i\theta}$ y $z^{-1} = r^{-1}e^{-i\theta}$.

Igualdad $\Rightarrow r = r^{-1} \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = 1$.

Todos los complejos de módulo 1:

$$\boxed{z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \theta \in \mathbb{R}}.$$

18. Escribe en forma binómica y en forma de par el cociente de los números $6_{120^\circ} \dots$

— (falta el segundo número; lo deajo en blanco).

19. Realiza las operaciones en forma polar y luego pasa a binómica

Los únicos apartados que se leen con claridad en tu captura:

d) $(\sqrt{2} - i)^6$

Primero al cuadrado: $(\sqrt{2} - i)^2 = 1 - 2\sqrt{2}i$.

Cuarta potencia: $(1 - 2\sqrt{2}i)^2 = -7 - 4\sqrt{2}i$.

Sexta: $(-7 - 4\sqrt{2}i)(1 - 2\sqrt{2}i) = -23 + 10\sqrt{2}i$.

$$\boxed{-23 + 10\sqrt{2}i}$$

h) $(3 - 3i)^8$

$$3 - 3i = 3\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4}\right).$$

$$(3\sqrt{2})^8 = 104\,976, -8 \cdot \frac{\pi}{4} = -2\pi \Rightarrow \text{ángulo } 0.$$

$$\boxed{104\,976}$$

h) $(3 - 3i)^8$

$$3 - 3i = 3\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right).$$

$$(3\sqrt{2})^8 = 104\,976, \quad -8 \cdot \frac{\pi}{4} = -2\pi \Rightarrow \text{ángulo } 0.$$

$$\boxed{104\,976}$$

k) $(1_{45^\circ})^{18} : (2_{90^\circ})^3$

$$(1_{45^\circ})^{18} = 1_{810^\circ} = 1_{90^\circ} = i.$$

$$(2_{90^\circ})^3 = 8_{270^\circ}.$$

$$\text{Cociente: } \frac{1}{8} \frac{90^\circ - 270^\circ}{-270^\circ} = \frac{1}{8} \frac{-180^\circ}{-180^\circ} = -\frac{1}{8}.$$

$$\boxed{-\frac{1}{8}}$$

l) $(-2 + 2i)^{10}$

$$-2 + 2i = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}.$$

$$(2\sqrt{2})^{10} = 2^{15} = 32\,768, \quad 10 \cdot \frac{3\pi}{4} = \frac{15\pi}{2} = 3\pi/2 \pmod{2\pi}.$$

$$\boxed{-32\,768\,i}$$

El resto de apartados del 19 no se leen bien $\rightarrow$ “—”.

20. Calcula y escribe en todas las formas

a) $\frac{(1+i)(1-i)^5}{2 - 2\sqrt{3}i}$

$$(1-i)^2 = -2i \Rightarrow (1-i)^4 = (-2i)^2 = -4 \Rightarrow (1-i)^5 = -4(1-i) = -4 + 4i.$$

$$\text{Numerador: } (1+i)(-4+4i) = -8.$$

$$\frac{-8}{2 - 2\sqrt{3}i} = -\frac{4}{1 - \sqrt{3}i} = -(1 + \sqrt{3}i).$$

- Binómica: $\boxed{-1 - \sqrt{3}i}.$

- Módulo: 2.

- Ángulo: $240^\circ = \frac{4\pi}{3}.$

- Polar/trig.: $\boxed{2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)}.$

b) $\frac{2}{1 - \sqrt{3}i} + \frac{2}{1 + \sqrt{3}i} + \frac{2}{1 + i}$

$$\frac{2}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \frac{2}{1 + \sqrt{3}i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Suman 1.

$$\frac{2}{1+i} = 1-i.$$

Total:

$$1 + (1-i) = \boxed{2-i}.$$

- Polar: $r = \sqrt{5}$, $\theta = -\arctan \frac{1}{2} \approx -0,4636$ rad.
- Trig.: $\boxed{\sqrt{5} (\cos \theta + i \sin \theta)}$.